

Technische Universität Dresden  
Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion

Diplomarbeit

# **Untersuchungen zu dynamischen Lagerkräften bei Zahnradgetrieben**

Thomas Henlich

15. Mai 1998

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>4</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>5</b>
<b>Thesen</b>	<b>6</b>
<b>Abkürzungen und Formelzeichen</b>	<b>7</b>
<b>Vorwort</b>	<b>9</b>
<b>1 Präzisierung der Aufgabenstellung</b>	<b>10</b>
<b>2 Literaturlauswertung</b>	<b>11</b>
<b>3 Kräfte im Getriebe</b>	<b>12</b>
3.1 Zahnkräfte . . . . .	12
3.1.1 Statische und dynamische Zahnkräfte . . . . .	13
3.2 Lagerkräfte . . . . .	14
3.2.1 Statische Lagerkräfte . . . . .	14
3.2.2 Dynamische Lagerkräfte . . . . .	15
3.3 Auswirkungen der Zahnkräfte . . . . .	15
3.4 Auswirkungen der Lagerkräfte . . . . .	16
3.4.1 Statische Kräfte . . . . .	16
3.4.2 Dynamische Kräfte . . . . .	16
<b>4 Numerische Simulation eines Torsionsschwingungsmodells</b>	<b>17</b>
4.1 Einleitung . . . . .	17
4.2 Ziel . . . . .	17
4.3 Modell . . . . .	17
4.4 Bewegungsgleichungen . . . . .	18
4.5 Statisches Verhalten . . . . .	18
4.6 Eigenfrequenz . . . . .	19
4.7 Zustandsgleichung . . . . .	19
4.8 Simulation . . . . .	20
4.9 Eingriffssteifigkeit . . . . .	20
4.10 Dämpfungskoeffizient . . . . .	21
4.11 Simulationsprotokollierung . . . . .	23

## *Inhaltsverzeichnis*

4.12 Ergebnisse . . . . .	23
<b>5 Erweitertes Schwingungsmodell</b>	<b>26</b>
<b>6 ITI-SIM</b>	<b>28</b>
6.1 Simulation mit ITI-SIM . . . . .	28
6.2 Einfaches Torsionsschwingungsmodell . . . . .	28
6.3 Torsionsmodell mit Zusatzmasse . . . . .	28
6.4 Simulation des erweiterten Schwingungsmodells . . . . .	28
6.4.1 Geradverzahnung . . . . .	31
6.4.2 Schrägverzahnung . . . . .	31
6.4.3 Einfluß des Lastmomentes . . . . .	31
6.5 Erweiterung des Koordinatensystems . . . . .	35
 <b>Anhang</b>	 <b>37</b>
<b>A Die Quelldatei torsionsschwinger1.c</b>	<b>37</b>
<b>B Die Quelldatei zahnsteifigkeit.c</b>	<b>42</b>
<b>C Die Eingabedatei torsionsschwinger1-0.dat</b>	<b>43</b>
<b>D Das Shell-Script eta-verlauf</b>	<b>44</b>
<b>E ITI-Simulationsergebnisse</b>	<b>45</b>
<b>F Simulationsergebnisse des erweiterten Modells mit Schrägverzahnung</b>	<b>47</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>50</b>
<b>Sachregister</b>	<b>51</b>

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Ein- und Ausgangsmoment am Getriebe . . . . .	12
3.2	Senkr. Flanke . . . . .	13
3.3	Evolventische Flanke . . . . .	13
3.4	Axialkraft . . . . .	14
3.5	Normalkraft . . . . .	14
3.6	Kräfteplan . . . . .	14
3.7	Schallausbreitung im Getriebe, ausgehend vom Zahneingriff . . . . .	15
4.1	Einfaches Torsionsschwingungsmodell . . . . .	18
4.2	Eingriffssteifigkeit . . . . .	22
4.3	Verlauf der dynamischen Zahnkraft . . . . .	24
4.4	Amplitude über Frequenzverhältnis $\eta$ . . . . .	25
5.1	Erweitertes Schwingungsmodell . . . . .	26
6.1	Die Benutzungsoberfläche von ITI-SIM . . . . .	29
6.2	Simulationsplan des einfachen Torsionsmodells . . . . .	29
6.3	Aus der Simulation erhaltene dynamische Kraft bei Einfach-Modell . . . . .	30
6.4	Frequenzanalyse der Kraft bei einfachem Modell . . . . .	30
6.5	Simulationsplan des Modells mit Zusatzmasse . . . . .	31
6.6	Simulationsplan des erweiterten Schwingungsmodells . . . . .	32
6.7	Lagerkräfte $F_{l1y}$ , $F_{l2y}$ bei dem erweiterten Schwingungsmodell mit $\beta = 0$ . . . . .	33
6.8	Lüfterkennlinie . . . . .	34
6.9	Simulationsplan mit drehzahlabhängigem Lastmoment – Detail . . . . .	34
6.10	Zeitverlauf des Lastmomentes bei Verbraucher mit Lüfterkennlinie . . . . .	35
6.11	Erweiterung des Koordinatensystems für beliebige Eingriffsrichtungen . . . . .	36
E.1	Dynamische Kraft bei Modell mit Zusatzmasse . . . . .	46
E.2	Frequenzanalyse der Kraft bei Zusatzmassen-Modell . . . . .	46
F.1	Lagerkräfte $F_{l1y}$ , $F_{l1z}$ . . . . .	48
F.2	Lagerkräfte $F_{l2y}$ , $F_{l2z}$ . . . . .	49

## Zusammenfassung

Getriebe wandeln Drehmomente um; es treten hierbei Kräfte an den Zahnrädern auf. Bei einer Schrägverzahnung wirken neben Radialkräften auch Axialkräfte. Axiale und radiale Lagerkräfte sind die Reaktion auf die Zahnkräfte. Hohe Zahnkräfte können zu Verzahnungsschäden führen. Hohe Lagerkräfte verursachen Lagerverschleiß und führen zum Klappern des Lagers und zur Schallabstrahlung durch die Getriebewände.

Ausgangspunkt für die Simulation eines einfachen Zwei-Räder-Systems bildet ein Torsionsschwingungsmodell mit zwei Freiheitsgraden. Die Simulationsschrittweite ergibt sich aus der Eigenfrequenz, letztere wird analytisch bestimmt. Vier Zustandsgleichungen beschreiben den Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt der Simulation. Das Runge-Kutta-Verfahren berechnet schrittweise den Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{i+1}$  aus  $\mathbf{x}_i$ . Die Eingriffssteifigkeit ändert sich während des Eingriffs und wird in jedem Schritt  $i$  neu ermittelt. Der Schwingungsverlauf der Zahnkraft erreicht nach 10 Perioden die stationäre Phase. Resonanzen treten auf, wenn die Eigenfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Eingriffsfrequenz ist.

Ein erweitertes Schwingungsmodell mit 6 Freiheitsgraden beinhaltet auch die Lager- und Wellenelastizitäten und die entsprechenden Dämpfungen. Eine analytische Lösung dieses Systems für den Fall nicht konstanter Eingriffssteifigkeit ist nicht zweckmäßig.

ITI-SIM liefert für das einfache Torsionssystem identische Ergebnisse wie das vom Autor entwickelte Simulationsprogramm. Unter Einbeziehung der Lagersteifigkeiten in das ITI-SIM-Modell erhält man den Verlauf der Lagerkräfte. Bei einem Schrägungswinkel  $\beta > 0$  treten als Simulationsergebnis außerdem Axialkräfte auf. Bei Modellierung einer Momentenkennlinie am Abtrieb schwankt das Abtriebsmoment, hervorgerufen durch die Schwankung der Eingriffssteifigkeit.

Um zwei Getriebestufen mit unterschiedlichen Eingriffsrichtungen im Simulationsmodell koppeln zu können, wird eine Koordinatentransformation verwendet.

## Thesen

1. Dynamische Zahn- und Lagerkräfte sind die Ursache für die Schallabstrahlung von Getrieben.
2. Die momentane Eingriffssteifigkeit ist nicht konstant, sondern von der Eingriffsstellung abhängig.
3. Diese Schwankung der Eingriffssteifigkeit ist eine wesentliche Ursache der Schwingungen im Getriebe.
4. Die Simulation mittels des speziell entwickelten Simulationsprogramms ist mit geringem Rechenaufwand durchführbar und liefert akzeptable Ergebnisse.
5. Komplexe Modelle sind analytisch nicht lösbar.
6. Mit steigender Modellkomplexität erhöht sich der Rechenaufwand bei der numerischen Simulation überproportional.

## Abkürzungen und Formelzeichen

Die Einordnung der griechischen Buchstaben erfolgt nach deren Benennung, z. B. wird  $\psi$  wie *psi* eingeordnet.

$\nearrow$	Verweis auf eine Textstelle, ein Bild o. ä.
$\alpha_t$	Eingriffswinkel
$\beta$	Schrägungswinkel
$\mathbf{C}$	Steifigkeitsmatrix
$c_m$	mittlere Eingriffssteifigkeit
$c_p$	Zahnpaarsteifigkeit
$c_z$	Eingriffssteifigkeit
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix
$D_z$	Dämpfungsmaß
d. h.	das heißt
$d_z$	Eingriffsdämpfung
$\varepsilon_\alpha$	Profilüberdeckung
$F_a$	Axialkraft
$F_{bn}$	Normalkraft am Grundkreis
$F_{bt}$	Tangentialkraft am Grundkreis
$f_{\text{dyn}}$	dynamische Zahnkraft, bezogen auf statische Zahnkraft
$F_n$	Normalkraft
$F_r$	Radialkraft
$F_t$	Tangentialkraft
$F_z$	Zahnkraft
FFT	engl. <i>fast Fourier transform</i> , Schnelle Fourier-Transformation

## *Abkürzungen und Formelzeichen*

$h$	Simulationsschrittweite
$\mathbf{h}$	Vektor der äußeren Kräfte bzw. Momente
$i$	Index des Simulationsschrittes
i. a.	im allgemeinen
ITI	ITI ist eingetragenes Warenzeichen der Gesellschaft für ingenieurtechnische Informationsverarbeitung mbH (ITI GmbH)
$J$	Trägheitsmoment
Kfz	Kraftfahrzeug
$k_v$	Korrekturfaktor für Doppeleingriff
$m$	Masse
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
o. ä.	oder ähnliches
$\omega$	Eigenfrequenz
$\mathbf{O}_{(m,n)}$	Nullmatrix
$\psi$	Drehwinkel
$\mathbf{q}$	Koordinatenvektor
$r$	Radius
$r_b$	Grundkreisradius
S.	Seite
$t$	Zeit
$T_1$	Eingangsmoment, Antriebsmoment
$T_2$	Ausgangsmoment, Abtriebsmoment
$x$	eingriffsbezogene Wegkoordinate
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$z$	Zähnezahl
z. B.	zum Beispiel



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde in der Zeit von Januar bis Mai 1998 am Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion an der Technischen Universität Dresden angefertigt.

Meinem Betreuer, Prof. Linke, danke ich für die Unterstützung und die wertvollen Hinweise.

Dr. Mühl half mir bei Fragen der Simulation und stellte Hard- und Software zur Verfügung. Dr. Pawandenat hat mich bei der Einarbeitung in die Handhabung von ITI-SIM unterstützt. Herr Petrick vom Universitätsrechenzentrum half mir freundlicherweise bei einem drucktechnischen Problem. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Ich habe diese Arbeit selbständig angefertigt und alle verwendeten Quellen im Literaturverzeichnis (S. 50) angeführt.

Dresden, 15. Mai 1998

Thomas Henlich

# 1 Präzisierung der Aufgabenstellung

Anhand einer Literaturrecherche ist zu ermitteln, mit welchen Methoden dynamische Belastungen in Getrieben berechnet werden können.

Es ist zu erläutern, welche Kräfte in Zahnradgetrieben wirken und wie sie bestimmt werden. Eine Klassifikation dieser Kräfte ist vorzunehmen: Welchen Einfluß haben sie auf das Schwingungsverhalten des Getriebes?

Die Gleichungen zur analytischen Berechnung der dynamischen Lagerkräfte sind für ein schrägverzahntes einstufiges Stirnradgetriebe aufzustellen. Dabei ist eine solche Formulierung zu wählen, die eine Erweiterung auf beliebige (mehrstufige) Getriebestrukturen ermöglicht. Ist eine analytische Berechnung unter Beachtung aller Parameter praktisch durchführbar?

Als Alternative zur analytischen Rechnung ist die Methode der rechnergestützten Simulation zu diskutieren. Die Vorgehensweise bei der Simulation mechanischer Antriebssysteme ist zu untersuchen. Anhand eines Beispiels sind die Arbeitsschritte vom Modell bis zum Simulationsprogramm und der Darstellung der Ergebnisse durchzuführen.

Die praktische Anwendbarkeit des Simulators ITI-SIM bei Getriebeuntersuchungen ist anhand des bearbeiteten Beispiels zu verifizieren. Ein Simulationsmodell für ITI-SIM soll aufgestellt werden, mit dem die Berechnung der Lagerkräfte bei einem einstufigen Getriebe mit Schrägverzahnung möglich ist; die Berechnung ist durchzuführen und die Ergebnisse sind zu dokumentieren. Dieses Modell muß die Eigenschaft der Modularität besitzen, d. h. kompliziertere Getriebestrukturen sind durch Zusammensetzen der Grundbausteine (Module) generierbar.

Anhand von Modellvariationen (z. B. andere Momentenkennlinie) ist die Flexibilität der Lösung nachzuweisen.

## 2 Literaturlauswertung

KÜÇÜKAY [6] verwendet ein Verfahren zur Modellierung und zur mathematischen Beschreibung der Dynamik, die für verschiedene Getriebetypen (z. B. einstufige Stirnradgetriebe, mehrstufige Schaltgetriebe, Planetengetriebe) *einheitlich* erfolgt. Deshalb ist dieses Verfahren, bei dem die Parameter und die Modellstruktur in Matrizenform dargestellt werden, gut für eine Berechnung durch Computer geeignet. KÜÇÜKAY untersucht auch die Resonanzen durch variable Zahnsteifigkeit sowie Rasselschwingungen bei Schaltgetrieben (Klappen von nicht geschalteten Rädern), wobei hier die Theorie mechanischer Systeme mit un stetigen Übergängen verwendet wird. Rasselschwingungen bilden eine wesentliche Geräuschquelle bei Kfz-Schaltgetrieben.

LINKE [7, 6.3] stellt grundlegende Formeln für das Schwingungssystem „Getriebe“ auf. Die Steifigkeit der Lager wird mittels eines Korrekturfaktors in die Steifigkeit des Torsionssystems einbezogen. Das führt zu einer Vereinfachung der Berechnung bei guter Näherung. LINKE stellt Verfahren zur Parameterbestimmung ( $c$ ,  $d$ ) vor, die sich unmittelbar praktisch verwenden lassen. Die beschriebene Methode zum Ermitteln des statischen Verhaltens und zur Lösung der Bewegungsgleichung ist universell verwendbar, da die Matrizenschreibweise angewandt wurde.

BÖRNER [1] untersucht ebenfalls die Lösung der Bewegungsgleichung, wobei das Instabilitätsverhalten ausführlich behandelt wird. Die Resonanzen der stationären Schwingungen finden besondere Beachtung. Zur Lösung werden teilanalytische und numerische Verfahren diskutiert. Die beschriebene Modellreduktion ist von großer Bedeutung, um den Rechenaufwand zu senken und somit die Effizienz bei der Berechnung zu steigern.

THIELE [8] befaßt sich mit dem Einsatz von ITI-SIM bei Untersuchungen an Getriebemotoren. Die Erkenntnisse sind auch auf andere Arten mechanischer Systeme anwendbar. THIELE diskutiert zwei konträre Vorgehensweisen bei der Modellbildung:

1. von einem möglichst einfachen Modell ausgehen, dieses bis zur gewünschten Genauigkeit erweitern,
2. ein kompliziertes Modell schaffen und dieses soweit wie möglich vereinfachen

Die Nachteile des ITI-SIM-internen Elements „Zahnradstufe“ werden erläutert. Umfangreiche ITI-SIM-Berechnungen sind Bestandteil der Arbeit.

## 3 Kräfte im Getriebe

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Kräfte gegeben, die in einem Zahnradgetriebe wirken. Es geht vor allem um die Begriffe statische und dynamische Kräfte, sowie Lager- und Zahnkräfte. Als Beispiel dient ein einstufiges Stirnradgetriebe, die erläuterten Kräfte sind jedoch prinzipiell bei allen Arten von Zahnradgetrieben wirksam.

### 3.1 Zahnkräfte

Die Aufgabe von Getrieben ist, Momente und Drehzahlen umzuwandeln. Das Getriebe in Bild 3.1 wandelt das Eingangsmoment  $T_1$  in das Ausgangsmoment  $T_2$  um. Am Berührungspunkt der Räder muß eine Tangentialkraft  $F_t$  auftreten:

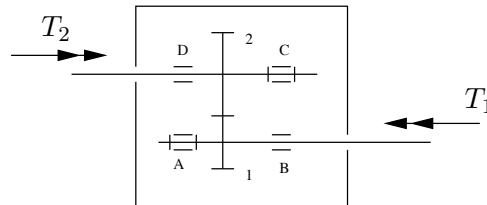


Bild 3.1: Ein- und Ausgangsmoment am Getriebe

$$F_t = \frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

Stellt man sich nun (hypothetisch) die Zähne der Räder so vor, daß ihre Berührebene senkrecht zur Verbindungslinie der Radzentren verläuft (↗ Bild 3.2), dann wäre  $F_t$  tatsächlich die einzige auftretende Kraft, und nur durch sie würde das Drehmoment zwischen den Wellen 1 und 2 übertragen. Nun besitzen die Zähne in der Regel jedoch eine Evolventenform. Das bedeutet, daß ihre Berührebene um den Winkel  $\alpha_t$  gegenüber der „Senkrechten“ geneigt ist (↗ Bild 3.3). Zwischen zwei sich berührenden Flächen kann eine Kraft immer nur senkrecht zur Berührebene übertragen werden.<sup>1</sup> Diese Kraft wird hier mit  $F_{bt}$  bezeichnet (↗ Bild 3.3).<sup>2</sup> Da nun, wie beschrieben, eine Kraft  $F_t$  auftreten muß, kann  $F_{bt}$  als Vektorsumme von  $F_t$  und einer anderen Kraft  $F_r$ , der Radialkraft, ausgedrückt werden:

$$\vec{F}_{bt} = \vec{F}_t + \vec{F}_r$$

<sup>1</sup>Tatsächlich existiert auch eine Reibung parallel zur Berührungsebene. Diese ist jedoch in dieser Betrachtung vernachlässigbar.

<sup>2</sup>Bei Schrägverzahnung ist  $F_{bt}$  die Projektion dieser Kraft in die Tangentialebene (Zeichenebene von Bild 3.3).

### 3 Kräfte im Getriebe

Aufgrund des Schrägungswinkels  $\beta$  der Zahnräder ist eine *dreidimensionale* Betrachtungsweise erforderlich (↗ Bild 3.4). Es wird deutlich, daß noch eine zusätzliche Kraft auftritt. Diese Kraft  $F_a$ , wirkt in axialer Richtung. Es gilt

$$\vec{F}_n = \vec{F}_t + \vec{F}_a \quad (3.1)$$

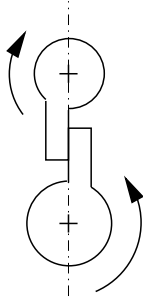


Bild 3.2: Senkr. Flanke

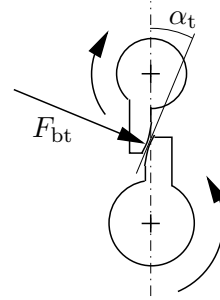


Bild 3.3: Evolventische Flanke

#### Fazit

Um ein Moment  $T_1$  zu übertragen, muß eine Tangentialkraft  $F_t = \frac{T_1}{r_1}$  wirken. Aufgrund der Verzahnungsgeometrie treten unerwünschte Kräfte  $F_r$  und  $F_a$  auf.

$$F_r = F_t \tan \alpha_t; \quad F_a = F_t \tan \beta$$

Die Kraft, die *eigentlich* senkrecht auf der Kontaktebene der Zahnflanken steht ( $F_{bt}$  ist nur die Projektion – ↗ Fußnote 2, S. 12), liegt in der Normalebene. Diese ist um den Winkel  $\beta$  gegenüber der Tangentialebene geneigt. Für die Kraft gilt:

$$\vec{F}_{bn} = \vec{F}_n + \vec{F}_r$$

oder, mit Gl. 3.1,

$$\vec{F}_{bn} = \vec{F}_t + \vec{F}_a + \vec{F}_r$$

Der Vektor dieser Kraft (↗ Bild 3.5) wird in weiteren Betrachtungen eine wichtige Rolle spielen.

#### 3.1.1 Statische und dynamische Zahnkräfte

Die bis hierher aufgestellten Zusammenhänge sind ausschließlich durch die geometrischen Verhältnisse im Zahneingriff bedingt. Sie sind nicht von einer zeitlichen Einflußgröße abhängig (wie Drehzahl, Frequenz usw.) und können deshalb sowohl für statische als auch für dynamische Betrachtungen verwendet werden. Bei den Lagerkräften wird jedoch im Falle dynamischer Untersuchungen eine andere Vorgehensweise unumgänglich (↗ Abschnitt 3.2). Deshalb müssen auch die Gleichungen für die Zahnkräfte noch modifiziert werden.

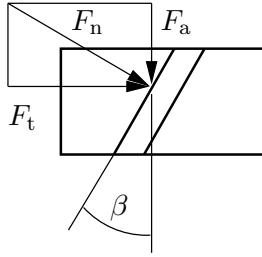


Bild 3.4: Axialkraft

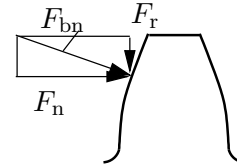


Bild 3.5: Normalkraft

## 3.2 Lagerkräfte

Für die Kräftebetrachtung unterscheidet man folgende Kategorien von Lagern: *Radiallager*, diese nehmen nur Kräfte senkrecht zur Radachse auf; *Axiallager*, welche nur Kräfte in Achsrichtung aufnehmen, sowie *Radial-/Axiallager*. In unserem Beispiel gibt es pro Welle je ein Radiallager und je ein Radial-/Axiallager.

### 3.2.1 Statische Lagerkräfte

Die Welle wird als starres System aufgefaßt. Die Lagerung erfolgt statisch bestimmt. Dann lassen sich die Lagerkräfte aus Kräfte- und Momentenbilanzen bestimmen (↗ Bild 3.6):

$$F_{rA} = \frac{F_a r + F_{bt} b}{a + b}; \quad F_{rB} = \frac{F_{bt} a - F_a r}{a + b}$$

$$F_{rA} = \frac{F_t}{a + b} \left( r \tan \beta + b \frac{1}{\cos \alpha} \right); \quad F_{rB} = \frac{F_t}{a + b} \left( a \frac{1}{\cos \alpha} - r \tan \beta \right)$$

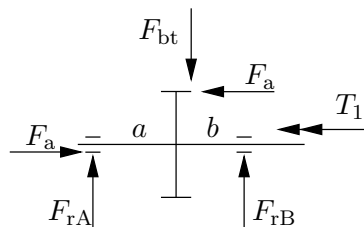


Bild 3.6: Kräfteplan

Diese Lösungsmethode mit dem Kräfteplan aus Bild 3.6 stellt eine Näherung dar, deren Genauigkeit aber für eine Berechnung der Lagerkräfte i. a. ausreicht. Genaugenommen liegen die Kräfte  $F_{rA}$  und  $F_{rB}$  *nicht* in einer Ebene. Das ist jedoch bei den meisten praktischen Anwendungen belanglos.

### 3.2.2 Dynamische Lagerkräfte

Bei einer dynamischen Betrachtung können Zahn, Rad, Welle und Lager *nicht* mehr als ein starres System betrachtet werden. Durch den Kraftangriff am Zahn tritt beispielsweise eine Verformung von Rad und Welle auf; die Kraft am Lager ist gleich dieser Verformung multipliziert mit einer Federkonstanten (die vom Werkstoff und der Bauteilgeometrie abhängt).<sup>3</sup> Bei dynamischen Vorgängen sind außerdem die Massenträgheit und die Dämpfung (unter anderem durch Schmiermittel) zu beachten. Es treten mehrere Arten von Schwingungen auf (Axial-, Radial- und Torsionsschwingungen), d. h. das System hat mehrere Freiheitsgrade.

All das bedeutet, daß das Getriebe als System von Massen modelliert werden muß, die durch Feder- und Dämpferelemente verbunden sind. Das dynamische Verhalten eines Getriebes wird somit durch ein System von Differentialgleichungen mathematisch beschrieben. Ein solches Modell wird in Kapitel 5 behandelt.

### 3.3 Auswirkungen der Zahnkräfte

Die maximal zulässige Zahnkraft ist eine Begrenzung für das übertragbare Moment. Bei Überschreitung treten Schäden an der Verzahnung auf, d. h. Zähne brechen oder Zahnflanken werden beschädigt (*pitting*). Man beachte, daß ein Zahn während jeder Umdrehung einmal be- und entlastet wird, es also für den Zahn keine statische, sondern stets eine *dynamische* Belastung gibt! Aufgrund dieser Dynamik entstehen auch Schwingungen im Zahneingriff, die sich zu einem Teil als Körperschall durch Rad und Welle fortpflanzen, und zum anderen Teil als Luftschall im Inneren des Getriebes abgestrahlt werden (↗ Bild 3.7).

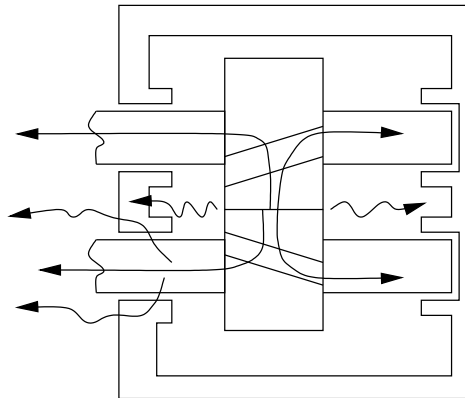


Bild 3.7: Schallausbreitung im Getriebe, ausgehend vom Zahneingriff

<sup>3</sup>Selbst diese Aussage ist eine wesentliche Vereinfachung der tatsächlichen physikalischen Zusammenhänge.

## 3.4 Auswirkungen der Lagerkräfte

Die Gesamtbelastung, d. h. die Summe aus statischer und dynamischer Belastung der Lager führt zu einem Verschleiß der Wälzkörper, soweit es sich um Wälzlager handelt. Bei Gleitlagern tritt im allg. kein solcher Verschleiß auf.

### 3.4.1 Statische Kräfte

Bei Wälz- und Gleitlagern haben statische Belastungen zum Teil günstige Auswirkungen: Da Wälzlager ein Lagerspiel aufweisen, erfolgt durch die statische Kraft eine Verspannung des Lagers. Als Beispiel sei hier die axiale Verspannung bei Schrägverzahnungen genannt: Hier drückt die Axialkraft (hervorgerufen durch die Schrägung) gegen das Axiallager und hebt dadurch das Lagerspiel auf. Bei Radialgleitlagern kann sich durch die Radialkraft ein exzentrischer Schmierpalt aufbauen. Dadurch wird ein tragfähiger Schmierfilm aufgebaut, der eine Festkörperberührung von Lager und Welle verhindert [4, S. 234]. Bei Axialgleitlagern funktioniert dieses Prinzip so nicht.

### 3.4.2 Dynamische Kräfte

Wenn neben statischen auch dynamische Lagerkräfte wirken, kann folgender Sachverhalt eintreten: Die dynamische Axialkraft wird genau so groß wie die statische und hebt diese auf. Dann wird der beschriebene Verspanneffekt aufgehoben, und das Lagerspiel wird wirksam, d. h. das Lager „klappert“.

Das besondere Interesse bei der Untersuchung der dynamischen Lagerkräfte gilt jedoch nicht dem Verschleiß, sondern der Geräuscentwicklung. Die Wellen sind im Gehäuse gelagert; deshalb bewirkt eine Schwingungsanregung der Lager eine Weiterleitung des Körperschalls an die Gehäusewände, von denen eine Abstrahlung an die Umgebung in Form von Luftschall erfolgt (↗ Bild 3.7) [7, 6.7].



## 4 Numerische Simulation eines Torsionsschwingungsmodells

### 4.1 Einleitung

In diesem Abschnitt wird die Bewegungsgleichung für eine Radpaarung mit Geradverzahnung aufgestellt. Nur die Torsionsschwingungen werden untersucht. Es tritt Parametererregung durch den Zahnsteifigkeitsverlauf auf. Ausgehend von den Bewegungsgleichungen (in Matrixform) werden die Gleichungen für die Eigenfrequenz der Schwingung, die Zustandsgleichung für die numerische Simulation und das Simulationsprogramm (Programmiersprache C) erstellt. Für die Simulation wird das Runge-Kutta-Verfahren (4. Ordnung) verwendet.

### 4.2 Ziel

Die Beschäftigung mit diesem Simulationsproblem dient der Einarbeitung in die Thematik der numerischen Simulation. Die gewonnenen Erkenntnisse sollen beim Verständnis späterer und weitaus komplexerer Modelle angewendet werden.

Die Rechenergebnisse dieser Simulation werden mit den Resultaten verglichen, welche die Simulation mit ITI-SIM liefert. So können Aussagen über die Eigenschaften beider Verfahren gemacht werden.

### 4.3 Modell

↗ Bild 4.1, Seite 18

$r_{b1}, r_{b2}$  Grundkreisradien

$T_1, T_2$  An-/Abtriebsmoment

$\psi_1, \psi_2$  Drehwinkel

$c_z$  Verzahnungssteifigkeit

$d_z$  Dämpfungskoeffizient

$J_1, J_2$  Massenträgheitsmomente

Ein Spiel zwischen den Zahnflanken wird nicht berücksichtigt.

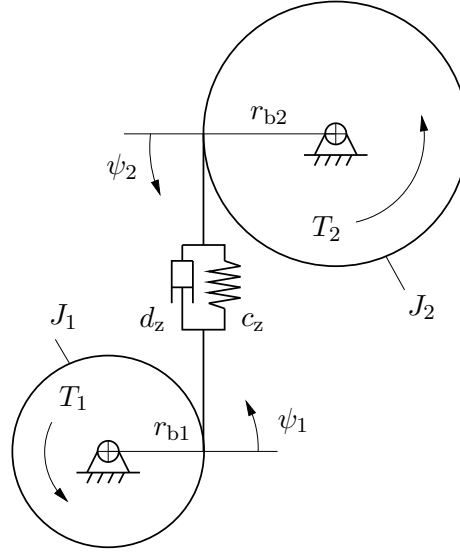


Bild 4.1: Einfaches Torsionsschwingungsmodell

#### 4.4 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen werden nach dem d'Alembertschen Prinzip aufgestellt. Die gedankliche Schnittführung erfolgt durch die Elemente  $c_z$  und  $d_z$ .

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\psi}_1 + d_z r_{b1} (\dot{r}_{b1} \dot{\psi}_1 + r_{b2} \dot{\psi}_2) + c_z r_{b1} (r_{b1} \psi_1 + r_{b2} \psi_2) &= T_1 \\ J_2 \ddot{\psi}_2 + d_z r_{b2} (r_{b1} \dot{\psi}_1 + r_{b2} \dot{\psi}_2) + c_z r_{b2} (r_{b1} \psi_1 + r_{b2} \psi_2) &= T_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

In Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{h} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_z r_{b1}^2 & d_z r_{b1} r_{b2} \\ d_z r_{b1} r_{b2} & d_z r_{b2}^2 \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_z r_{b1}^2 & c_z r_{b1} r_{b2} \\ c_z r_{b1} r_{b2} & c_z r_{b2}^2 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{h} &= \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}; \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.5 Statisches Verhalten

Um Anfangsbedingungen für die Simulation zu erhalten, wird der Vektor  $\mathbf{q}_0$  berechnet. Die Matrix  $\mathbf{C}_m$  ergibt sich aus der mittleren Zahnsteifigkeit  $c_m$  (↗ Abschn. 4.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m \mathbf{q}_0 &= \mathbf{h} \\ c_m \begin{pmatrix} r_{b1}^2 & r_{b1} r_{b2} \\ r_{b1} r_{b2} & r_{b2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$r_{b1}\psi_{10} + r_{b2}\psi_{20} = \frac{T_1}{c_m r_{b1}} = \frac{T_2}{c_m r_{b2}}$$

$$\frac{T_1}{r_{b1}} = \frac{T_2}{r_{b2}}; \quad \text{Vorgabe von } \psi_{20} = 0 \quad \leadsto \quad \psi_{10} = \frac{T_1}{c_m r_{b1}^2}$$

## 4.6 Eigenfrequenz

Die Eigenfrequenz  $\omega$  wird aus folgender Determinante bestimmt:

$$|\mathbf{C}_m - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.4)$$

$$\left| c_m \begin{pmatrix} r_{b1}^2 & r_{b1}r_{b2} \\ r_{b1}r_{b2} & r_{b2}^2 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\omega^2 = c_m \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) \quad (4.5)$$

## 4.7 Zustandsgleichung

Zunächst wird die Bewegungsgleichung (4.2) umgeformt:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} \quad (4.6)$$

$\mathbf{M}^{-1}$  ist die zu  $\mathbf{M}$  inverse Matrix.

Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  beschreibt den Zustand des Schwingungssystems während der Simulation.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Die Zustandsgleichung lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (4.8)$$

mit den Übermatrizen  $\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{(2,2)} & \mathbf{E}_{(2,2)} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{array} \right)$  und  $\mathbf{b} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{O}_{(2,1)} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} \end{array} \right)$ .

Dabei sind  $\mathbf{O}_{(m,n)}$   $(m, n)$ -dimensionale Nullmatrizen und  $\mathbf{E}_{(2,2)}$  ist die 2-dimensionale, quadratische Einheitsmatrix  $\mathbf{E}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Die Zustandsgleichung in ausführlicher Schreibweise lautet:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_z r_{b1}^2}{J_1} & -\frac{c_z r_{b1} r_{b2}}{J_1} & -\frac{d_z r_{b1}^2}{J_1} & -\frac{c_z r_{b1} r_{b2}}{J_1} \\ -\frac{c_z r_{b1} r_{b2}}{J_2} & -\frac{c_z r_{b2}^2}{J_2} & -\frac{d_z r_{b1} r_{b2}}{J_2} & -\frac{c_z r_{b2}^2}{J_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{T_1}{J_1} \\ \frac{T_2}{J_2} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

## 4.8 Simulation

Der Simulationszeitraum wird in Schritte der Länge  $h = t_{i+1} - t_i$  zerlegt. Unter Verwendung der Zustandsgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$  wird aus  $\mathbf{x}_i$  der nächste Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{i+1}$  nach folgendem Schema berechnet (Runge-Kutta-Verfahren):

$t$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$	$h \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$
$t_i$	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)$	$\mathbf{k}_1$
$t_i + \frac{h}{2}$	$\mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1$	$\mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$	$\mathbf{k}_2$
$t_i + \frac{h}{2}$	$\mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2$	$\mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$	$\mathbf{k}_3$
$t_i + h$	$\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3$	$\mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3)$	$\mathbf{k}_4$
$\mathbf{k} = \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$			
$t_{i+1} = t_i + h$	$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{k}$	$\dots$	$\dots$

Die Simulation beginnt mit  $\mathbf{x}_0$  bei  $t = 0$ . Der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ergibt sich aus der statischen Last (↗ Abschnitt 4.5) und der Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\Omega$ :

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \\ \dot{\psi}_{10} \\ \dot{\psi}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T_1}{c_m r_{b1}^2} \\ 0 \\ \Omega \\ \frac{z_1}{z_2} \Omega \end{pmatrix}$$

Die Schrittweite  $h$  richtet sich nach der Eigenfrequenz  $\omega$ :

$$h = \frac{1}{10\omega} \quad (4.10)$$

Das verwendete Verfahren ist ein Verfahren 4. Ordnung, da der Fehler proportional  $h^4$  ist.

## 4.9 Eingriffssteifigkeit

Die Zahnpaarsteifigkeit ist während des Zahneingriffs *nicht* konstant. Zu Beginn und am Ende des Eingriffs ist sie geringer als in der Mitte. Außerdem sind bei einer Profilüberdeckung von  $\varepsilon_\alpha = 1 \dots 2$  abwechselnd ein und zwei Zahnpaare im Eingriff. Die

Gesamtsteifigkeit setzt sich im Fall des Doppeleingriffs aus den Einzelsteifigkeiten zusammen.

Die Zahnpaarsteifigkeit wird durch folgendes Polynom angenähert [6]:

$$\begin{aligned} c_p(x) &= c_{p2} + \frac{4}{\varepsilon_\alpha} (c_{p1} - c_{p2}) x - \frac{4}{\varepsilon_\alpha^2} (c_{p1} - c_{p2}) x^2 \\ c_p(x) &= c_{p1} + (c_{p2} - c_{p1}) \left( \frac{2}{\varepsilon_\alpha} x - 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$c_{p1}$  maximale Zahnpaarsteifigkeit in Eingriffsmitte

$c_{p2}$  minimale Zahnpaarsteifigkeit zu Eingriffsbeginn und -ende

$\varepsilon_\alpha$  Profilüberdeckung

$x$  eingriffsbezogene Wegkoordinate,  $x = \frac{z}{2\pi} \psi$

Die Gesamtsteifigkeit  $c_z$  ergibt sich wie folgt ( $\nearrow$  Bild 4.2):

$$c_z(x) = \begin{cases} k_v [c_p(x) + c_p(x+1)] & : 0 \leq x < \varepsilon_\alpha \\ c_p(x) & : \varepsilon_\alpha \leq x < 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Der Korrekturfaktor  $k_v$  ( $k_v < 1$ ) wird eingeführt, da aufgrund der Radkörperverformung unter Last die Einzelsteifigkeiten nicht einfach addiert werden können.

Die mittlere Steifigkeit  $c_m$  ist für die Bestimmung der Eigenfrequenz notwendig. Sie wird durch Integration berechnet:

$$\begin{aligned} c_m &= \int_{x=0}^1 c_z(x) dx \\ &= k_v \int_0^{\varepsilon_\alpha-1} [c_p(x) + c_p(x+1)] dx + \int_{\varepsilon_\alpha-1}^1 c_p(x) dx \\ &= k_v \int_0^{\varepsilon_\alpha-1} c_p(x) dx + k_v \int_1^{\varepsilon_\alpha} c_p(x) dx + \int_{\varepsilon_\alpha-1}^1 c_p(x) dx \\ c_m &= [2k_v(\varepsilon_\alpha - 1) + 2 - \varepsilon_\alpha] c_{p1} + \frac{\varepsilon_\alpha}{3} (c_{p2} - c_{p1}) \left[ (1 - k_v) \left( \frac{2}{\varepsilon_\alpha} - 1 \right)^3 + k_v \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

## 4.10 Dämpfungskoeffizient

Der Dämpfungskoeffizient  $d_z$  wird als konstant über der Eingriffsperiode angenommen.

$$d_z = 2D_z \sqrt{c_\gamma m_{\text{red}}} b = 2D_z \sqrt{\frac{c_m}{\frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2}}} = 2D_z \frac{c_m}{\omega} \quad (4.15)$$

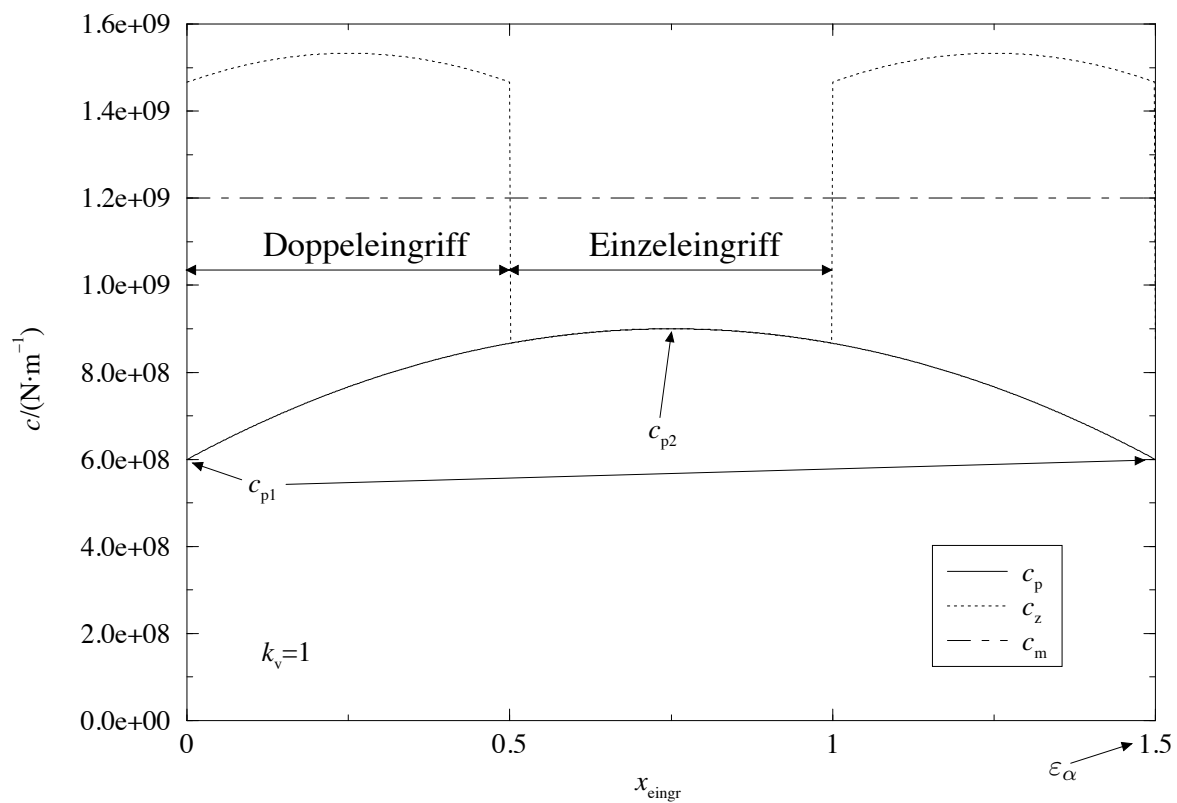


Bild 4.2: Eingriffssteifigkeit

$b$	Zahnbreite
$D_z$	Dämpfungsmaß (ist abhängig von Betriebsbedingungen)
$c_\gamma$	Eingriffsfedersteife, $c_\gamma = \frac{c_m}{b}$
$m_{\text{red}}$	reduzierte Ersatzmasse, $m_{\text{red}} = \frac{1}{\left(\frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2}\right)b}$

## 4.11 Simulationsprotokollierung

Für die Auswertung interessant ist der Verlauf der Zahnkraft  $F_z$ . Diese läßt sich bei jedem Simulationsschritt aus dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  berechnen:

$$F_z = c_z(r_{b1}\psi_1 + r_{b2}\psi_2) + d_z(r_{b1}\dot{\psi}_1 + r_{b2}\dot{\psi}_2)$$

oder, in vektorieller Schreibweise:

$$F_z = \mathbf{f}^T \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_z r_{b1} \\ c_z r_{b2} \\ d_z r_{b1} \\ d_z r_{b2} \end{pmatrix}^T \mathbf{x}$$

Protokolliert wird die dynamische Kraft, bezogen auf die statische Kraft:

$$f_{\text{dyn}} = \frac{F_z - F_s}{F_s} \quad (4.16)$$

Die statische Kraft  $F_s$  wird allein durch das konstante Antriebsmoment bestimmt:

$$F_s = \frac{T_1}{r_{b1}} \quad (4.17)$$

Die Größe  $f_{\text{dyn}}$  ist einheitslos.

## 4.12 Ergebnisse

Die Berechnung erfolgte mit den Daten aus Anhang C.

Bild 4.3 zeigt den Verlauf der Kraft zu Beginn der Simulation, im weiteren Simulationsverlauf ist die Amplitude konstant (stationäre Phase).

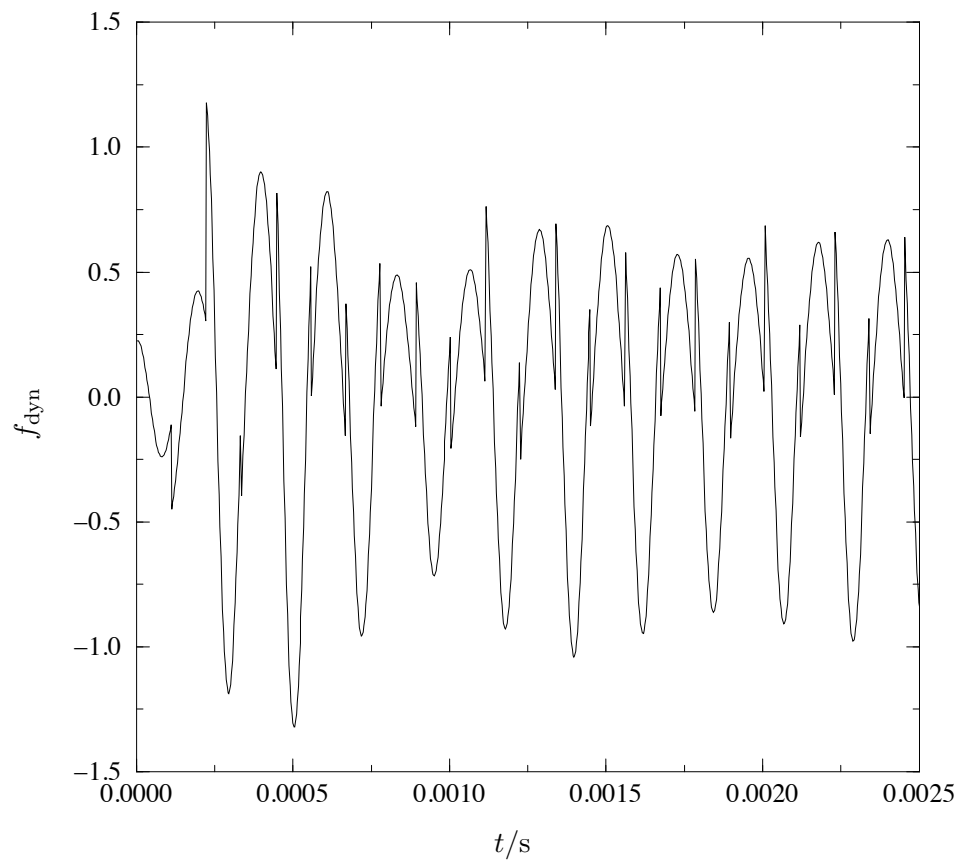


Bild 4.3: Verlauf der dynamischen Zahnkraft



#### 4 Numerische Simulation eines Torsionsschwingungsmodells

Das Programm **eta-verlauf** (↗ Anhang D) führt die Simulation für wechselnde Frequenzverhältnisse  $\eta$  durch.

$$\eta = \frac{\Omega z_1}{\omega}$$

$\Omega$  Antriebswinkelgeschwindigkeit

$z$  Zähnezahl

$\omega$  Eigenfrequenz (↗ 4.6)

Die Ergebnisse sind in Bild 4.4 dargestellt.

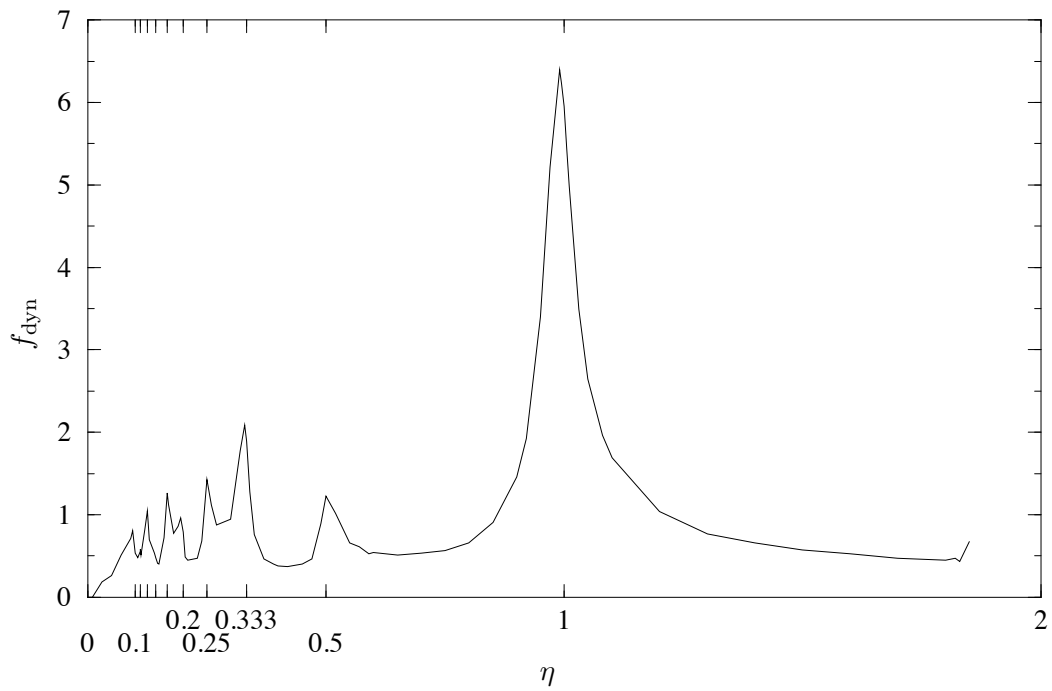


Bild 4.4: Amplitude über Frequenzverhältnis  $\eta$

## 5 Erweitertes Schwingungsmodell

Dieses Modell (↗ Bild 5.1) beinhaltet auch die Feder- und Dämpfungseigenschaften der Lager und die Elastizität der Wellen und Radkörper. Die radiale Gesamtfedersteifigkeit, bezogen auf den Zahneingriff, wird durch  $c_{y1}$  und  $c_{y2}$  dargestellt;<sup>1</sup>  $c_{z1}$  und  $c_{z2}$  verkörpern die axiale Gesamsteifigkeit. Die Torsionssteifigkeit hat den Wert  $c_{\psi1}$  bzw.  $c_{\psi2}$ .

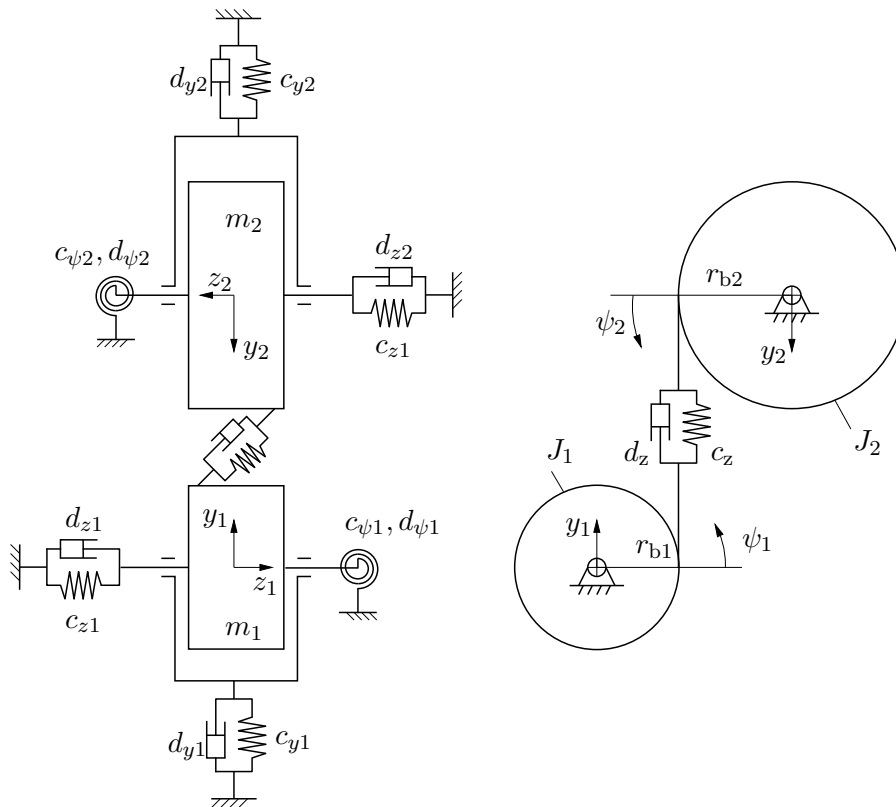


Bild 5.1: Erweitertes Schwingungsmodell

Im folgenden wird die Bewegungsgleichung für dieses Modell aufgestellt. Allgemein lautet sie wieder (wie in Gl. 4.2):

$$M\ddot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{O}_{(6,1)}$$

<sup>1</sup>Eine getrennte Erfassung der Lager links und rechts des Rades wäre exakter, erhöht aber auch die Dimension des Gleichungssystems.

## 5 Erweitertes Schwingungsmodell

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ \psi_1 \\ y_2 \\ z_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{y1} + d_z b_y^2 & d_z b_y b_z & d_z b_y^2 r_{b1} & d_z b_y^2 & d_z b_y b_z & d_z b_y^2 r_{b2} \\ d_z b_y b_z & d_{z1} + d_z b_z^2 & d_z b_y b_z r_{b1} & d_z b_y b_z & d_z b_z^2 & d_z b_y b_z r_{b2} \\ r_{b1} d_z b_y^2 & r_{b1} d_z b_y b_z & d_{\psi 1} + r_{b1}^2 d_z b_y^2 & r_{b1} d_z b_y^2 & r_{b1} d_z b_y b_z & r_{b1} r_{b2} d_z b_y^2 \\ d_z b_y^2 & d_z b_y b_z & d_z b_y^2 r_{b1} & d_{y2} + d_z b_y^2 & d_z b_y b_z & d_z b_y^2 r_{b2} \\ d_z b_y b_z & d_z b_z^2 & d_z b_y b_z r_{b1} & d_z b_y b_z & d_{z2} + d_z b_z^2 & d_z b_y b_z r_{b2} \\ r_{b2} d_z b_y^2 & r_{b2} d_z b_y b_z & r_{b1} r_{b2} d_z b_y^2 & r_{b2} d_z b_y^2 & r_{b2} d_z b_y b_z & d_{\psi 2} + r_{b2}^2 d_z b_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{y1} + c_z b_y^2 & c_z b_y b_z & c_z b_y^2 r_{b1} & c_z b_y^2 & c_z b_y b_z & c_z b_y^2 r_{b2} \\ c_z b_y b_z & c_{z1} + c_z b_z^2 & c_z b_y b_z r_{b1} & c_z b_y b_z & c_z b_z^2 & c_z b_y b_z r_{b2} \\ r_{b1} c_z b_y^2 & r_{b1} c_z b_y b_z & c_{\psi 1} + r_{b1}^2 c_z b_y^2 & r_{b1} c_z b_y^2 & r_{b1} c_z b_y b_z & r_{b1} r_{b2} c_z b_y^2 \\ c_z b_y^2 & c_z b_y b_z & c_z b_y^2 r_{b1} & c_{y2} + c_z b_y^2 & c_z b_y b_z & c_z b_y^2 r_{b2} \\ c_z b_y b_z & c_z b_z^2 & c_z b_y b_z r_{b1} & c_z b_y b_z & c_{z2} + c_z b_z^2 & c_z b_y b_z r_{b2} \\ r_{b2} c_z b_y^2 & r_{b2} c_z b_y b_z & r_{b1} r_{b2} c_z b_y^2 & r_{b2} c_z b_y^2 & r_{b2} c_z b_y b_z & c_{\psi 2} + r_{b2}^2 c_z b_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{O}_{(6,1)} \text{ ist der Nullvektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_y = \cos \beta_b ; \quad b_z = \sin \beta_b$$

$\beta_b$  ist der Schrägungswinkel am Grundkreis.

### Anmerkung zur Lösbarkeit

Die charakteristische Gleichung dieses Differentialgleichungssystems ist eine Gleichung sechster Ordnung. Darum ist eine analytische Lösung nicht möglich. Zwar existieren Näherungsverfahren, jedoch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Die Lösung durch Simulation stellt die bessere Alternative dar.

## 6 ITI-SIM

### 6.1 Simulation mit ITI-SIM

Die Eingabe des Modells für ITI-SIM erfolgt grafisch (↗ Bild 6.1, ↗ Bild 6.2, ↗ Bild 6.5): Man positioniert die *Knoten* (Träger von  $m$  bzw.  $J$ ) und die *Elemente* (Federn und Dämpfer, Kraft- und Momenteinleitung) sowie andere Objekte im Modellfenster und verbindet diese dann gemäß der Modellstruktur [3,5]. Die Ausgabe der Simulationsergebnisse erfolgt in Diagrammform (↗ Bild 6.3, ↗ Bild 6.4, ↗ Bild E.1, ↗ Bild E.2). ITI-SIM stellt zwar ebenfalls ein Element „Zahnradstufe“ zur Verfügung, dieses ist jedoch zu stark vereinfacht [8].

### 6.2 Einfaches Torsionsschwingungsmodell

Dieses Modell (↗ Bild 6.2) gleicht dem in Kapitel 4 vorgestellten. Zur Auswertung dient auch hier  $f_{\text{dyn}}$  (↗ Gl. 4.16, S. 23).

Das Diagramm (↗ Bild 6.3) zeigt den Verlauf zu Beginn der Simulation, im weiteren Simulationsverlauf bleibt die Amplitude konstant.

Die Frequenzanalyse (↗ Bild 6.4) erfolgte durch ITI-SIM nach dem Algorithmus der FFT (Schnelle Fourier-Transformation) [2]. Sie zeigt das Auftreten einer Grundfrequenz mit Oberschwingungen, die mit zunehmender Ordnung abklingen.

### 6.3 Torsionsmodell mit Zusatzmasse

Dieses Modell (↗ Bild 6.5) besitzt die gleiche Struktur wie das in 6.2 verwendete, nur ist an der Antriebsseite ein weiterer rotatorischer Knoten (Träger von  $J$ ) angebracht, der den Rotor eines Antriebsmotors verkörpert.

Trotz gleicher Parameter des Getriebemodells ( $m, J, c, \dots$ ) kommt es zu einem völlig anderen Schwingungsverlauf (↗ Bild E.1 im Anhang, S. 45). Die Frequenzanalyse (↗ Bild E.2) zeigt wiederum eine dominierende Grundfrequenz mit abklingenden Oberschwingungen.

### 6.4 Simulation des erweiterten Schwingungsmodells

In diesem Abschnitt wird das Modell aus Kapitel 5 simuliert. Hauptsächlich soll es dabei um die Lagerkräfte gehen, die Zahnkraft wurde bereits in den vorherigen Abschnitten ausreichend untersucht. Verschiedene Variationen des Modells werden behandelt, so eine Schrägverzahnung und die Auswirkungen eines nicht konstanten Lastmomentes.

## 6 ITI-SIM

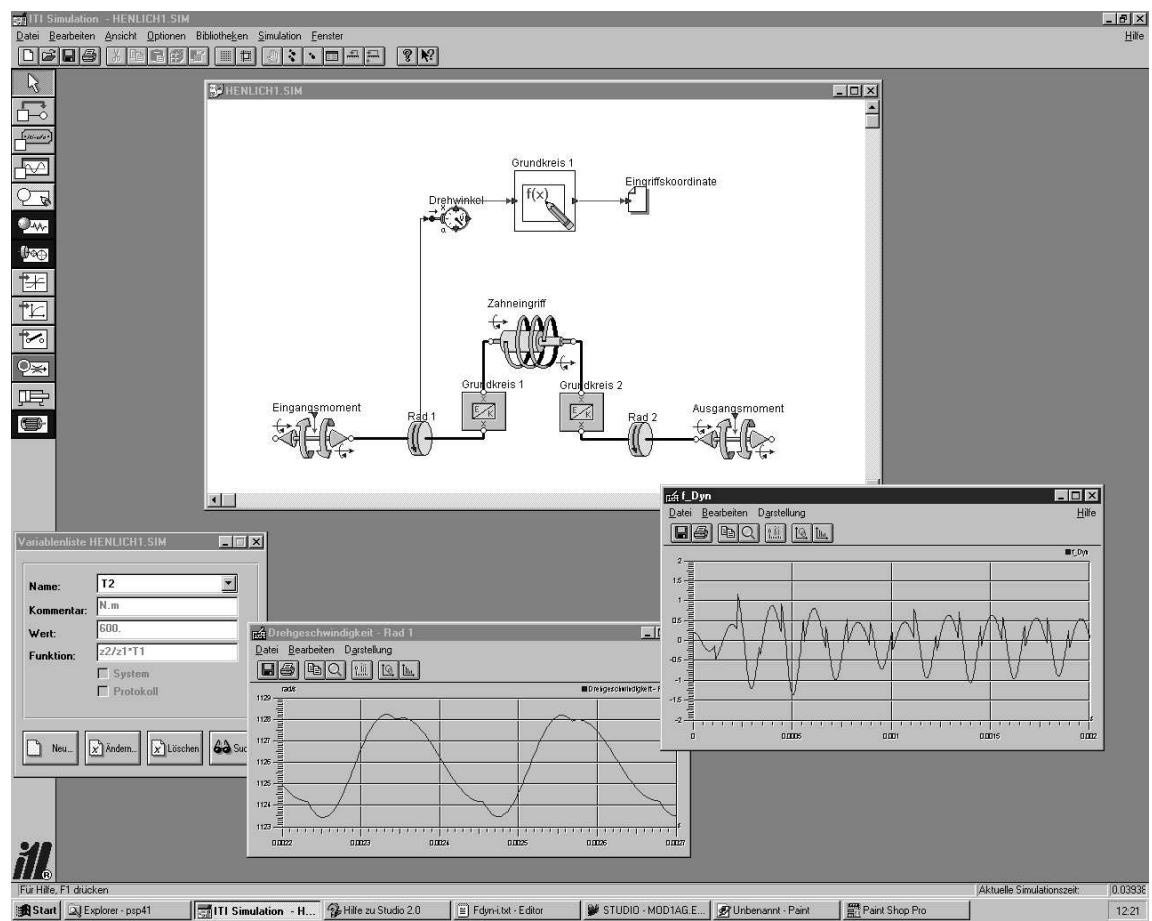


Bild 6.1: Die Benutzungsoberfläche von ITI-SIM

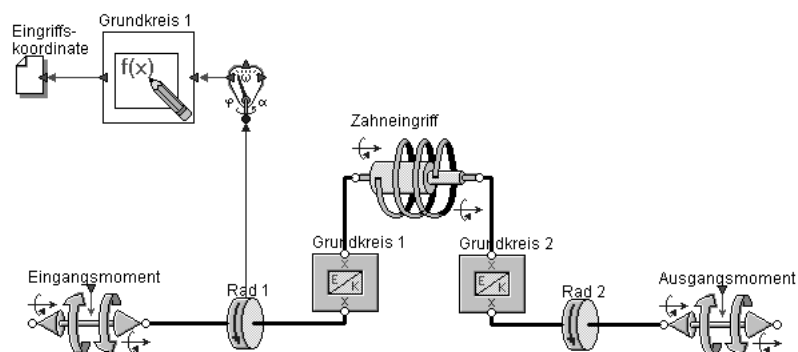


Bild 6.2: Simulationsplan des einfachen Torsionsmodells

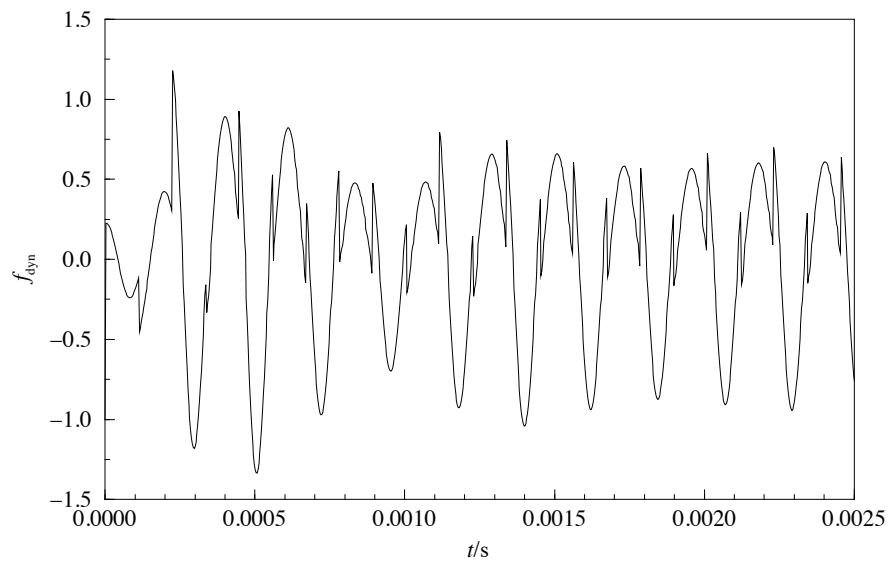


Bild 6.3: Aus der Simulation erhaltene dynamische Kraft bei Einfach-Modell

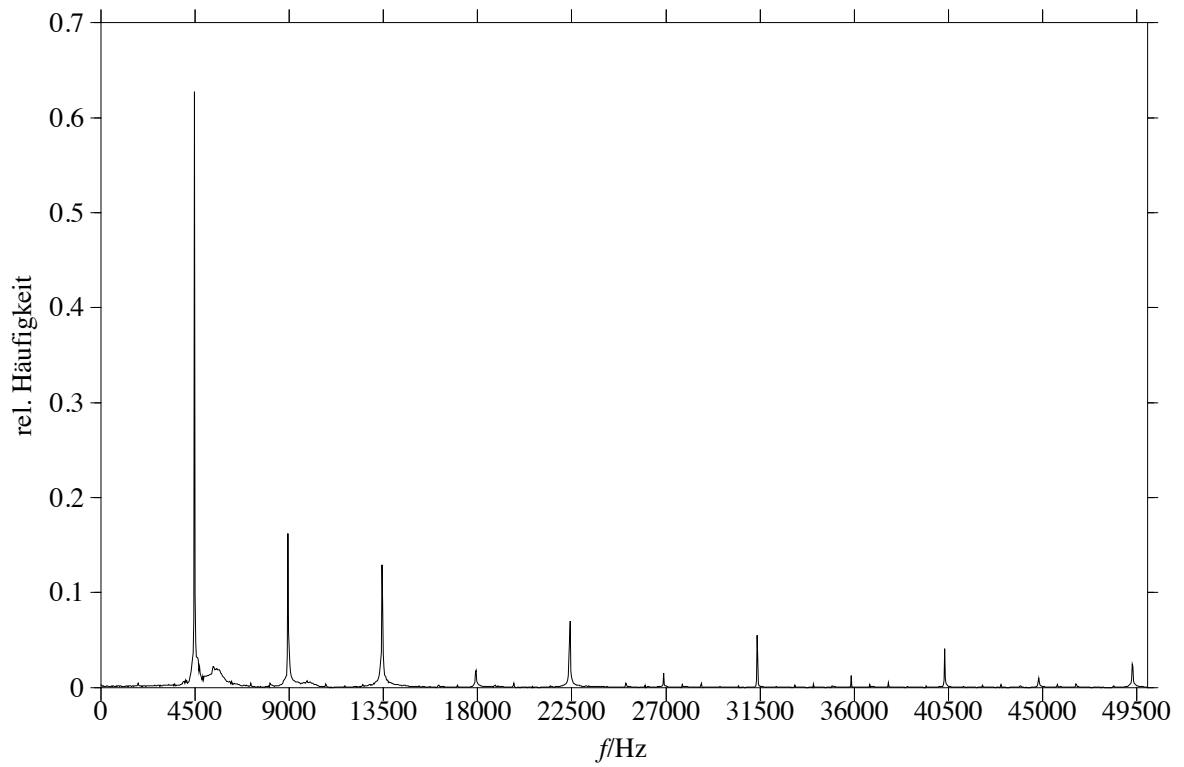


Bild 6.4: Frequenzanalyse der Kraft bei einfachem Modell

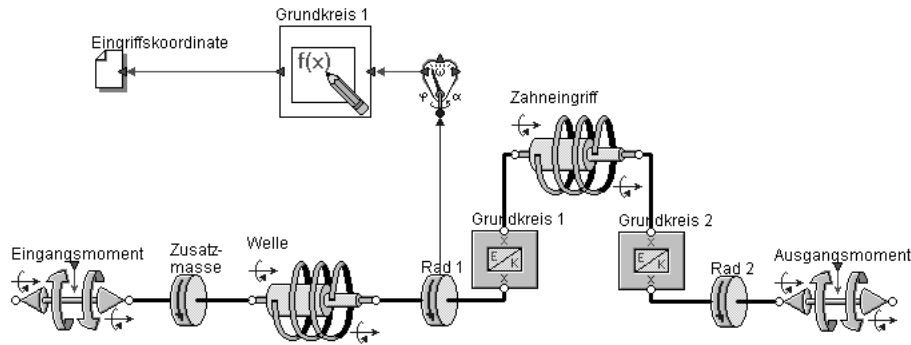


Bild 6.5: Simulationsplan des Modells mit Zusatzmasse

Aufgrund der gegenseitigen Beeinflussung der Koordinatenrichtungen ( $y, z, \psi$ ) ist dieses Modell (↗ Bild 6.6, S. 32) weitaus komplizierter als die in 6.2 und 6.3 behandelten. Diese Tatsache kommt auch in der vollständigen Besetzung<sup>1</sup> der Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ , die in Kapitel 5 aufgestellt wurden, zum Ausdruck.

#### 6.4.1 Geradverzahnung

Dieses und das in Abschnitt 6.4.2 untersuchte Modell sind bis auf den Wert von  $\beta$  identisch. Die Geradverzahnung wird als Spezialfall der Verzahnung mit  $\beta = 0$  betrachtet. Der Verlauf der Lagerkräfte ist in Bild 6.7 auf Seite 33 dargestellt.

#### 6.4.2 Schrägverzahnung

Unter Berücksichtigung des Schrägungswinkels  $\beta$  ergibt sich außer der Lagerkraftkomponente in  $y$ -Richtung eine Komponente in axialer Richtung ( $z$ -Richtung). Diese Axialkomponente ist bei Geräuschuntersuchungen besonders interessant, da durch sie die Gehäusewand durch die daran befestigten Lager zu Schwingungen angeregt wird (↗ Bild 3.7). Die Ergebnisse der Simulation einer Schrägverzahnung mit  $\beta = 14^\circ$  sind in Anhang F dargestellt.

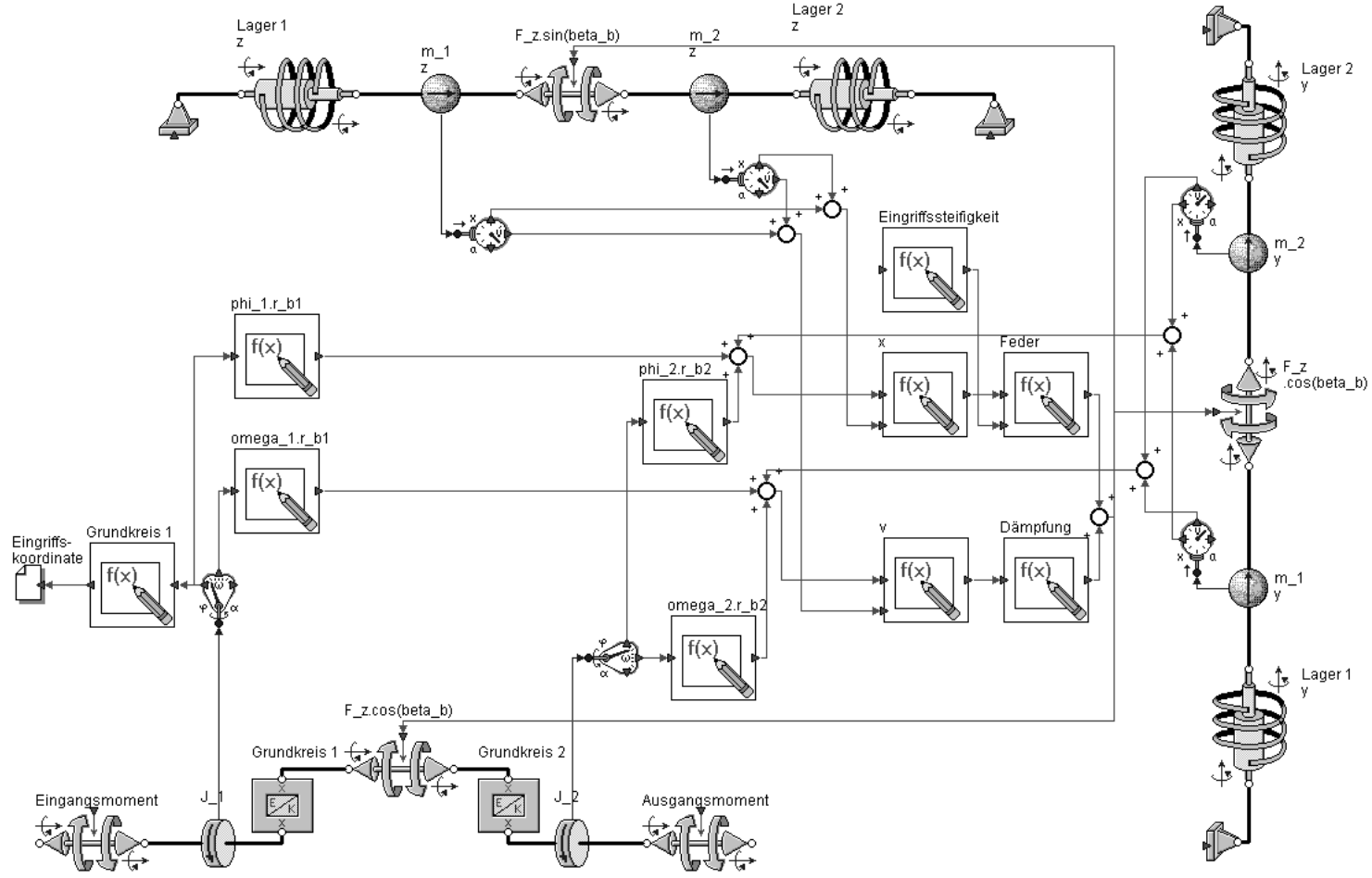
#### 6.4.3 Einfluß des Lastmomentes

##### Problem

In der Praxis werden häufig Verbraucher verwendet, die ein von der Drehzahl abhängiges Drehmoment aufbringen. Bild 6.8 zeigt eine solche Kennlinie. Es ist eine Lüfterkennlinie: Das Lastmoment ist vom geförderten Luftmassenstrom und damit von der Drehzahl

<sup>1</sup> Alle Elemente sind verschieden von Null.

Bild 6.6: Simulationsplan des erweiterten Schwingungsmodells





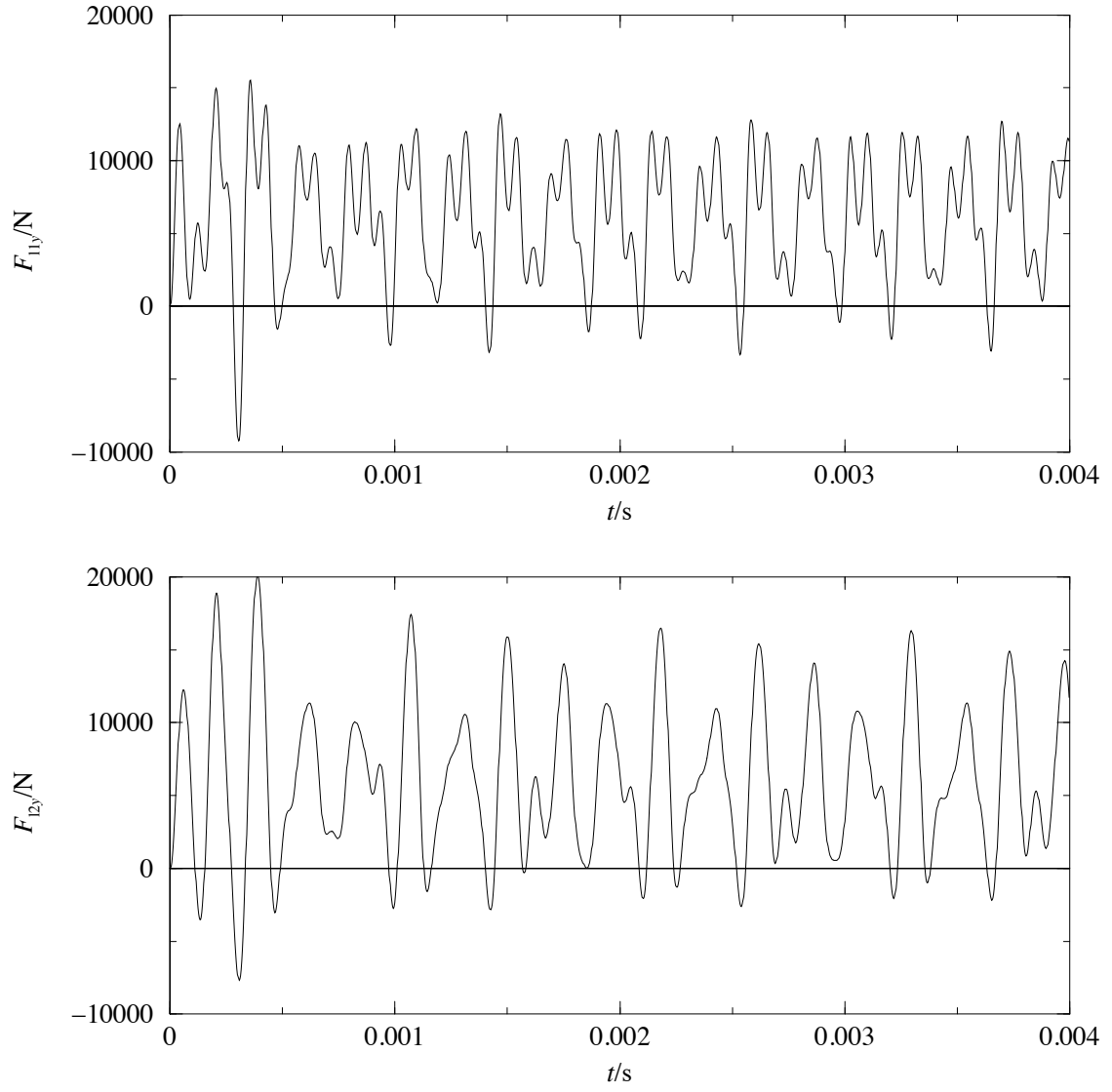


Bild 6.7: Lagerkräfte  $F_{11y}$ ,  $F_{12y}$  bei dem erweiterten Schwingungsmodell mit  $\beta = 0$

abhängig. Aus Bild 6.9 ist die Realisierung dieses Kennlinienverhaltens in ITI-SIM ersichtlich. Der hier nicht dargestellte Teil des Simulationsplanes entspricht Bild 6.6.

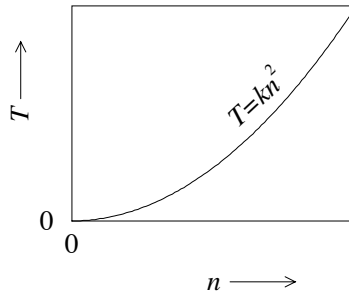


Bild 6.8: Lüfterkennlinie

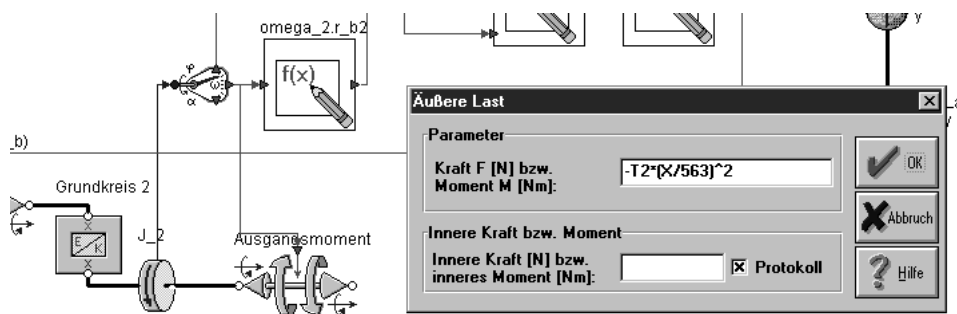


Bild 6.9: Simulationsplan mit drehzahlabhängigem Lastmoment – Detail

## Ergebnis

Das Lastmoment schwankt (↗ Bild 6.10), wenn auch nur um einen kleinen Betrag. Das ist durch die Schwankung der Eingriffssteifigkeit bedingt. Das Verhalten der anderen Größen (Lager- und Zahnkräfte) weist keine sichtbaren Unterschiede zu denen in 6.4.1 auf.

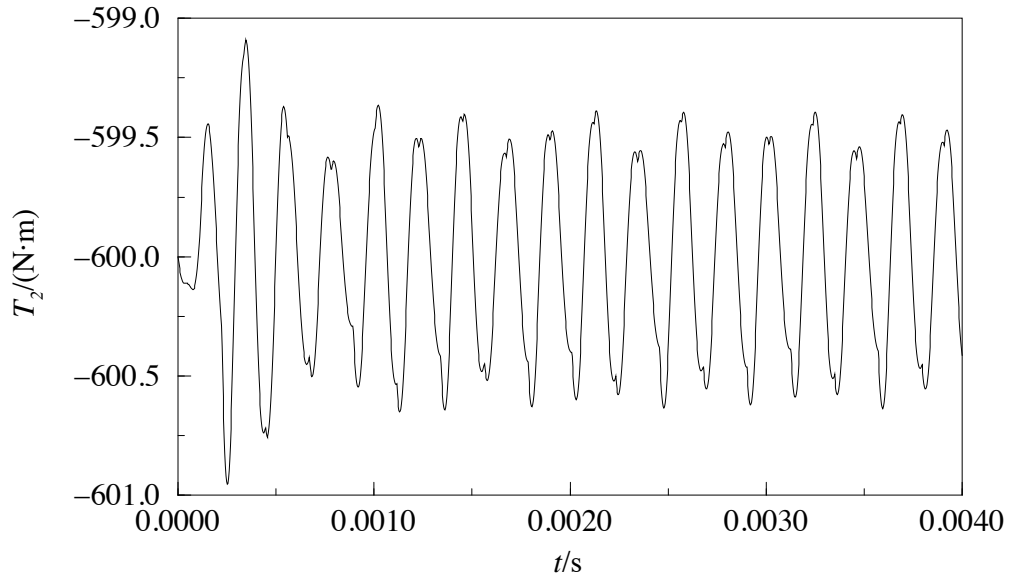


Bild 6.10: Zeitverlauf des Lastmomentes bei Verbraucher mit Lüfterkennlinie

## 6.5 Erweiterung des Koordinatensystems

Bei den bis hierher behandelten Modellen wurde die Koordinate  $y$  in Richtung der Eingriffsline gelegt (↗ Bild 5.1). Bei einstufigen Getrieben ist das eine vernünftige Vereinfachung, da sie die Anzahl der Koordinatenachsen reduziert. Bei mehrstufigen Getrieben sind im allgemeinen die Eingriffsrichtungen der einzelnen Stufen voneinander verschieden, so daß noch eine zusätzliche Koordinate eingeführt werden muß. Diese Erweiterung wird durch das Element „Ebener Transformator“ bewerkstelligt, welches zur Koordinatentransformation eingesetzt werden kann. Beliebige Eingriffsrichtungen können realisiert werden, im gezeigten Beispiel beträgt der Winkel zwischen  $y_h$ -Achse und Eingriffsline  $30^\circ$ .

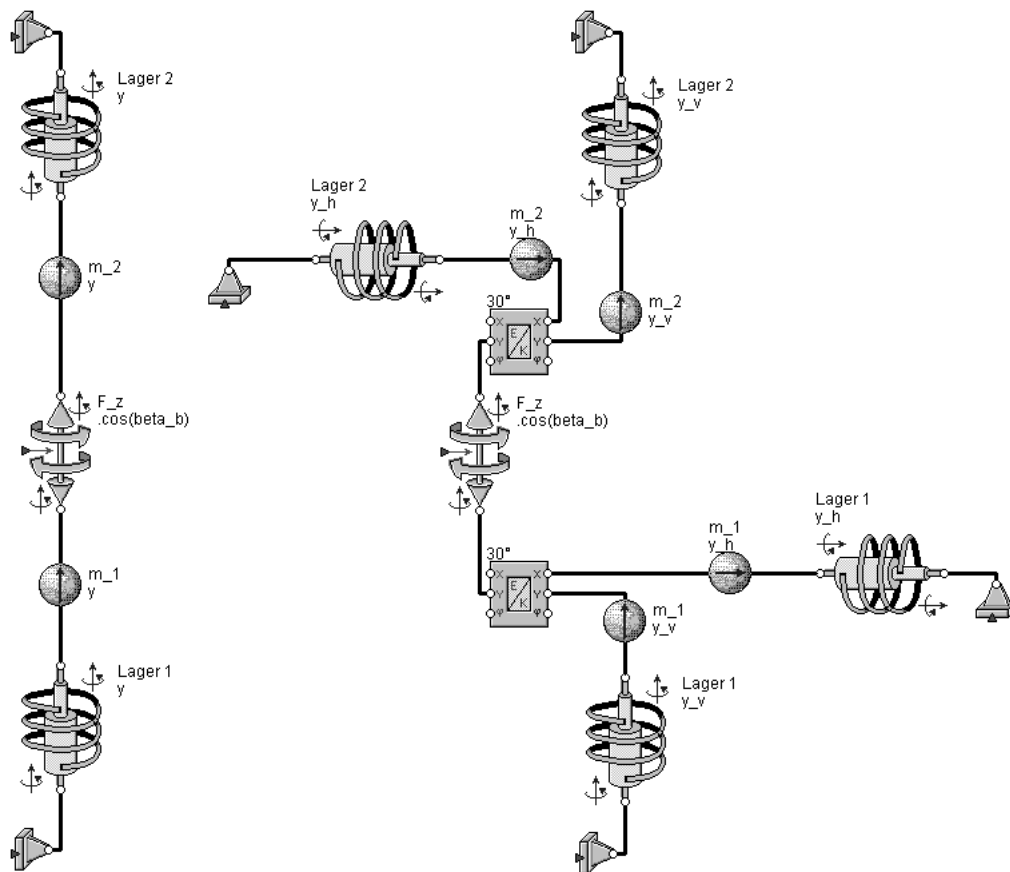


Bild 6.11: Erweiterung des Koordinatensystems für beliebige Eingriffsrichtungen

## A Die Quelldatei torsionsschwinger1.c

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <unistd.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double cp1,cp2,epal;
extern double cm(),cp(double),cz(double);

double kv,rb1,rb2,b_Rad,z1,z2,J1,J2,D,T1,eta;
double om_eig,cmi,psi10,dz,Om1,T2,Fs,x_eingr;
ssize_t line,N = 0;
char *LINEPTR = NULL;
double x[4],xp[4],h;
char mode;

/* addiert zu Vektor a den Vektor b */
v_add(double a[],double b[])
{
    int i;
    for (i=0;i<4;i++)
        a[i]+=b[i];
}

/* setzt Vektor a gleich Vektor b */
v_gleich(double a[],double b[])
{
    int i;
    for (i=0;i<4;i++)
        a[i]=b[i];
}

/* multipliziert Vektor a mit Skalar s */
v_skal(double a[],double s)
{
    int i;
```

```

    for (i=0;i<4;i++)
        a[i]*=s;
}

int zust_gl(double xp[],double x[],double t)
{
    double c,x_eingr;
    double A[4][4],b[4];
    int i,j;
    /* Berechn. x für Zahnsteifigkeit */
    x_eingr = z1/2/PI*x[0];
    c = cz(x_eingr);
    /* printf("-- %f %f --\n", */
    /* x_eingr,c); */

    A[0][0]= 0;          A[0][1]= 0;   A[0][2]= 1;          A[0][3]= 0;
    A[1][0]= 0;          A[1][1]= 0;   A[1][2]= 0;          A[1][3]= 1;
    A[2][0]=-c*rb1*rb1/J1;A[2][1]=-c*rb1*rb2/J1;
                                A[2][2]=-dz*rb1*rb1/J1;A[2][3]=-dz*rb1*rb2/J1;
    A[3][0]=-c*rb1*rb2/J2;A[3][1]=-c*rb2*rb2/J2;
                                A[3][2]=-dz*rb1*rb2/J2;A[3][3]=-dz*rb2*rb2/J2;

    b[0] = 0; b[1] = 0; b[2] = T1/J1; b[3] = T2/J2;

    for (i=0;i<4;i++)
    {
        xp[i] = 0;
        for (j=0;j<4;j++)
        {
            xp[i] += A[i][j]*x[j];
            /* printf("A[%d][%d]=%f x[%d]=%f\n", */
            /* i,j,A[i][j],j,x[j]); */
        }
        v_add (xp,b);
    }

    sim (double t0,double h,int n)
    {
        double c,x_eingr,Fz,Frel,Fmax = 0;
        int i;
        double t,t1;
        double x1[4],k1[4],k2[4],k3[4],k[4];
        t = t0;

```

```

for (i=0;i<n;i++)
{
    t1 = t;
    v_gleich (x1,x);
    zust_gl(xp,x1,t1); v_skal(xp,h); v_gleich (k1,xp);

    t1 = t+h/2;
    v_gleich (x1,k1); v_skal(x1,.5); v_add (x1,x);
    zust_gl(xp,x1,t1); v_skal(xp,h); v_gleich (k2,xp);

    v_gleich (x1,k2); v_skal(x1,.5); v_add (x1,x);
    zust_gl(xp,x1,t1); v_skal(xp,h); v_gleich (k3,xp);

    t1 = t+h;
    v_gleich (x1,k3); v_add (x1,x);
    zust_gl(xp,x1,t1); v_skal(xp,h); v_gleich (k,xp);

    v_add (k,k1);
    v_add (k,k2); v_add (k,k2);
    v_add (k,k3); v_add (k,k3);
    v_skal (k,1./6);

    t = t+h;
    v_add (x,k);
    /* Berechn. x für Zahnsteifigkeit */
    x_eingr = z1/2/PI*x[0];
    c = cz(x_eingr);
    Fz = c*rb1*x[0] + c*rb2*x[1] + dz*rb1*x[2] + dz*rb2*x[3];
    Frel = (Fz-Fs)/Fs;
    if (mode=='v')
{
    printf("%d %f %f %f %f %f %f %f\n",
    i,t,x[0],x[1],x[2],x[3],Frel,c);
}
    if ((i>.9*n) && (Frel>Fmax))
Fmax = Frel;
}
    if (mode=='a')
{
    printf("%f %f\n",eta,Fmax);
}
}

main()

```

A Die Quelldatei `torsionsschwinger1.c`

```

int i;
double t;

/* getdelim (&LINEPTR,&N,'\n',stdin); */
scanf("%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf %c",
&rb1,&rb2,&b_Rad,&z1,&z2,&J1,&J2,&cp1,&cp2,&epal,&kv,&D,&T1,&eta,&mode);

cmi = cm();

om_eig = sqrt(cmi*(rb1*rb1/J1+rb2*rb2/J2));

/* Berechnung der Antriebs-wg aus geford. Verhältn. eta=0m*z/om */
Om1 = eta*om_eig/z1;

/* stat. Zahnkraft */
Fs = T1/rb1;
/* Auslenkung durch stat. Moment */
psi10 = Fs/cmi/rb1;
T2 = z2/z1 * T1;

dz = 2*D*cmi/om_eig;
/* Anf.wert f. Zustandsvektor x0 */
x[0] = psi10; x[1] = 0; x[2] = Om1; x[3] = -z1/z2*Om1;

h = .1/om_eig;

/* printf("%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f\n", */
/* rb1,rb2,b_Rad,z1,z2,J1,J2,cp1,cp2,epal,kv,D,T1,eta); */
/* printf("%f %f %f %f %f %f\n", */
/* cmi,om_eig,Oml,x[3],psi10,dz,PI); */

switch (mode)
{
case 'v':
case 'a':
    sim (0,h,5000);
    break;
case 'c':
    for (i=0;i<=1000;i++)
{
    x_eingr=epal*i/1000.;
    printf("%f %f %f %f\n",x_eingr,cp(x_eingr),cz(x_eingr),cm());
}

```



```
}
    break;
case 'd':
    printf("cmi,om_eig,Om1,x[3],psi10,dz,PI\n");
    printf("%f %f %f %f %f %f %f\n",
cmi,om_eig,Om1,x[3],psi10,dz,PI);
    break;
default:
}
}
```

## B Die Quelldatei zahnsteifigkeit.c

```
/* Modul zur Berechnung der
   - Zahnpaarsteifigkeit cp (x)
   - Eingriffssteifigkeit cz (x)
   - mittl. Verzahnungssteifigkeit cm */
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <unistd.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

extern double cp1,cp2,epal,kv;

double cp(double x)
{
    return (cp1+(cp2-cp1)*(2/epal*x-1)*(2/epal*x-1));
}

double cz(double x)
{
    double x2;
    /* Normierung von x auf den Bereich 0...1 */
    x2 = fmod(x,1);
    /* printf("++ %lf %lf  ++\n",x,x2); */
    return ( (x2<epal-1) ? kv*(cp(x2)+cp(x2+1)) : cp(x2));
}

double cm()
{
    return ((2*kv*(epal-1)+2-epal)*cp1\
    + epal/3*(cp2-cp1)*((1-kv)*(2/epal-1)*(2/epal-1)*(2/epal-1)+kv));
}
```

## C Die Eingabedatei torsionsschwinger1-0.dat

```
50e-3 100e-3
40e-3
25 50
3000e-6 50000e-6
900e6 600e6
1.5 1
.04
300
0.8
c

#Eingabedaten für "torsionsschwinger1"
#rb1  rb2  b    z1  z2  J1    J2    cp1  cp2  epal  kv  D  T1  eta
#m    m    m    1   1   kg·m² kg·m² N/m  N/m  1    1   1  N·m  1
#
#Art der Programmausgabe
# v: Vollst. Sim.ablauf
# a: Amplitude stationär
# c: Verlauf der Eingr.steifigkeit über Eingr.strecke
# d: debug
```

## D Das Shell-Script eta-verlauf

```
#!/bin/sh
PROGR=torsionsschwinger1
AUSG='f-eta.dat'
rm $AUSG
RB1=50e-3
RB2=100e-3
B=40e-3
Z1=25
Z2=50
J1=3000e-6
J2=50000e-6
CP1=900e6
CP2=600e6
EPAL=1.5
KV=1.0
D=.04
T1=300
MODE=a

for i in .01 .03 .05 .07 .09 .095\
    .1 .105 .11 .111 .112 .12 .125 .13 .14 .143 .147 .15 .16 .167 .17 .18 .19 .195\
    .2 .205 .21 .23 .24 .25 .26 .27\
    .3 .32 .33 .333 .34 .35 .37 .39\
    .4 .42 .45 .47 .49\
    .5 .52 .55 .57 .59\
    .6 .65 .7 .75 .8 .85\
    .9 .92 .95 .97 .99 .995\
    1. 1.005 1.01 1.03 1.05 1.08\
    1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.82 1.83 1.85;
do
echo $RB1 $RB2 $B $Z1 $Z2 $J1 $J2 $CP1 $CP2 $EPAL $KV $D $T1 $i $MODE\
|$PROGR >>$AUSG;
done
```

## E ITI-Simulationsergebnisse

### Variablenliste

Variable	Wert
$r_{b1}$	$50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$r_{b2}$	$100 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$b$	$40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$z_1$	25
$z_2$	50
$J_1$	$3\,000 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_2$	$50\,000 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_{p1}$	$900 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$
$c_{p2}$	$600 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$
$\varepsilon_\alpha$	1,5
$k_v$	1
$D$	0,04
$T_1$	300 N·m
$\eta$	0,8

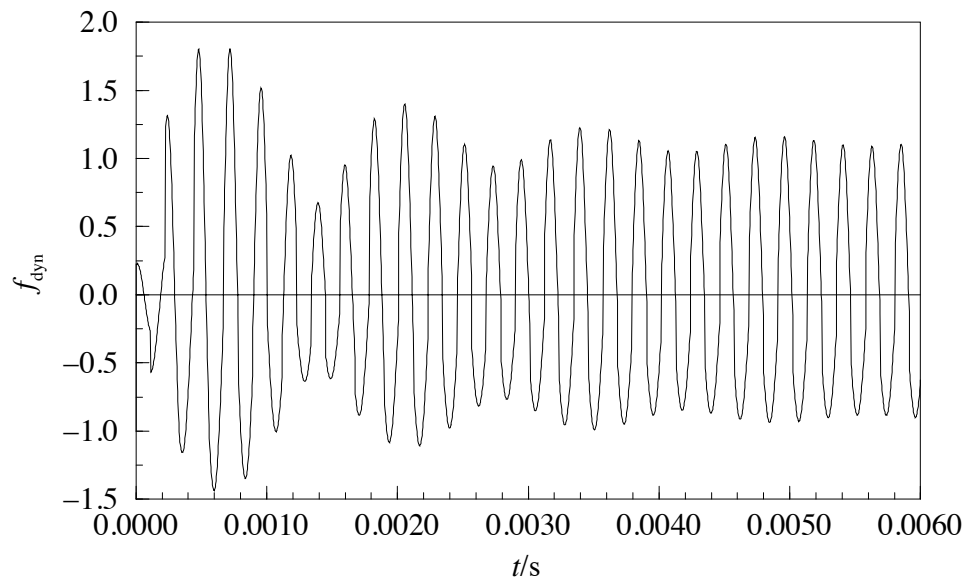


Bild E.1: Dynamische Kraft bei Modell mit Zusatzmasse

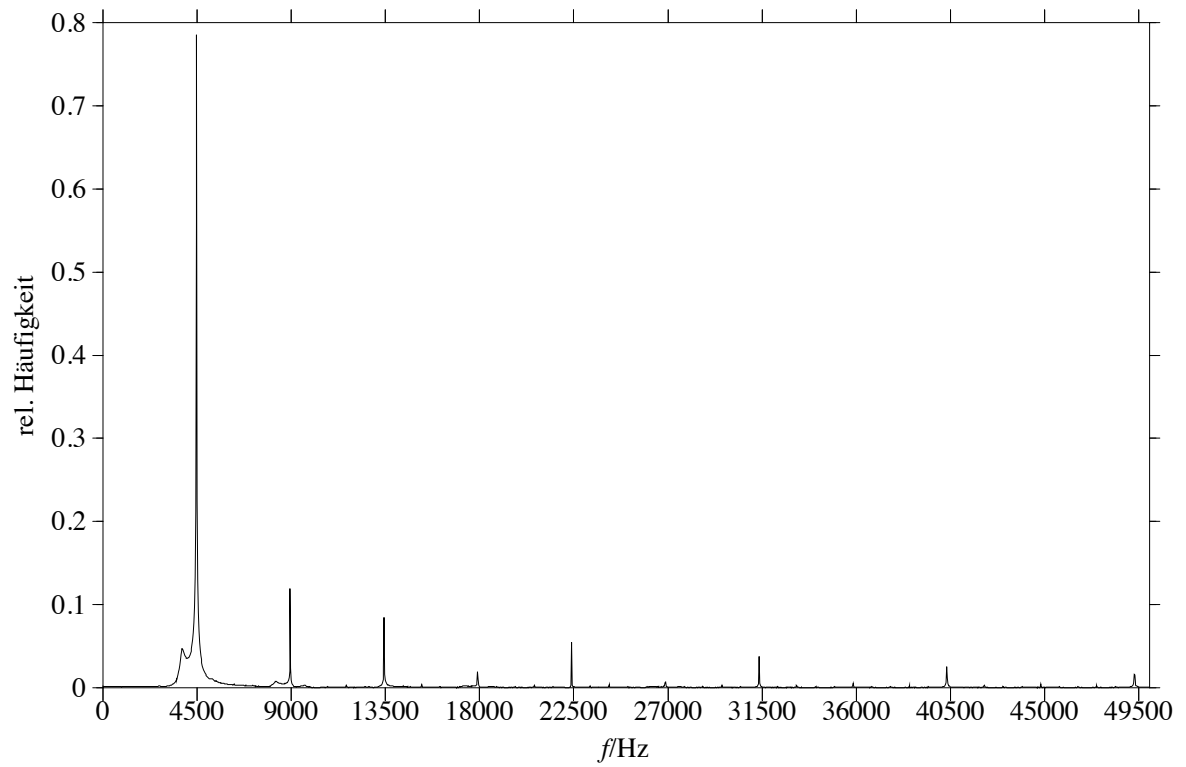


Bild E.2: Frequenzanalyse der Kraft bei Zusatzmassen-Modell

## F Simulationsergebnisse des erweiterten Modells mit Schrägverzahnung

### Variablenliste

Variable	Wert
$r_{b1}$	$50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$r_{b2}$	$100 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$b$	$40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$z_1$	25
$z_2$	50
$J_1$	$3\,000 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_2$	$50\,000 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$c_{p1}$	$900 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$
$c_{p2}$	$600 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$
$\varepsilon_\alpha$	1,5
$k_v$	1
$D$	0,04
$T_1$	300 N·m
$\eta$	0,8
$\beta$	$14 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

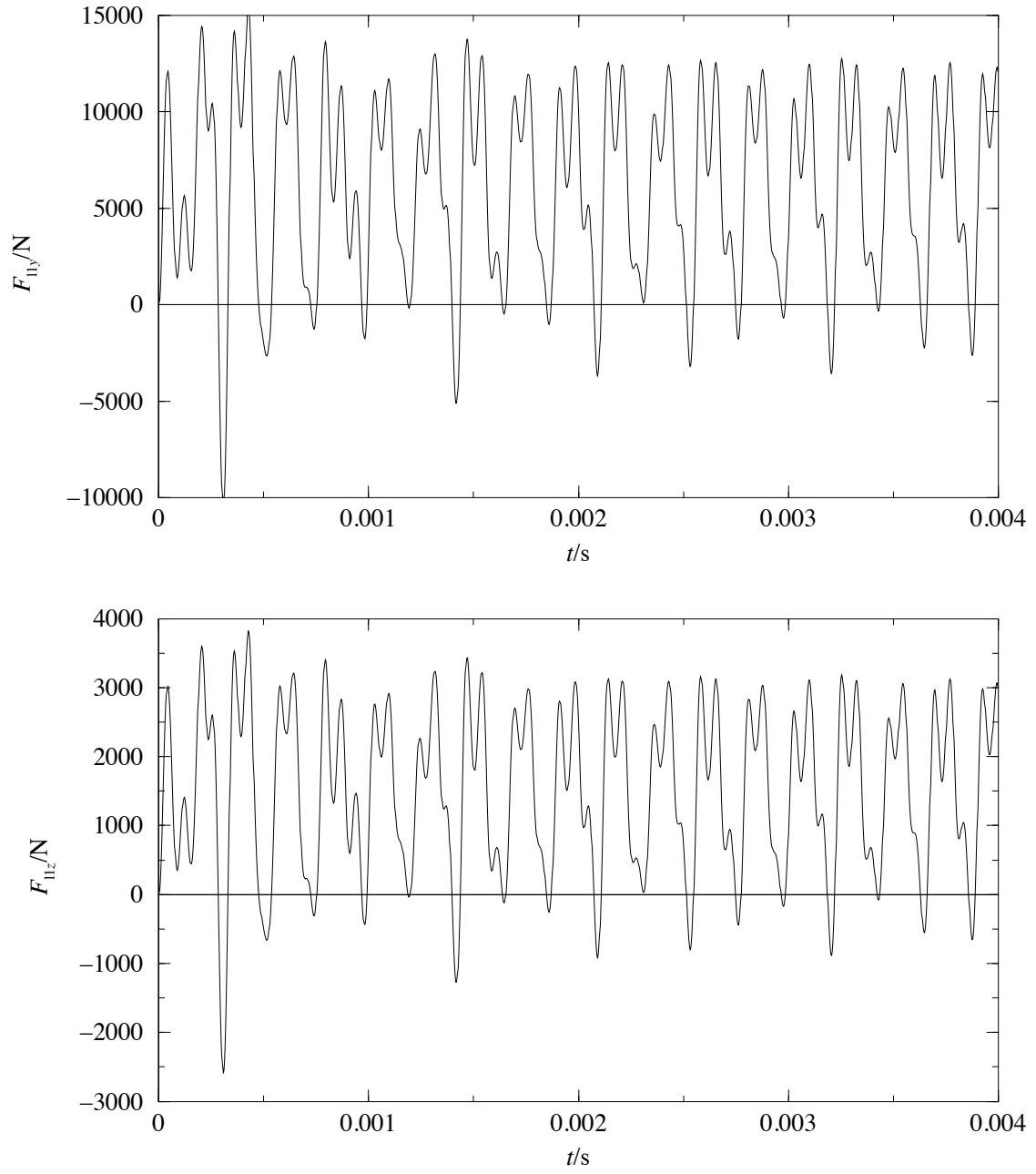


Bild F.1: Lagerkräfte  $F_{11y}$ ,  $F_{11z}$



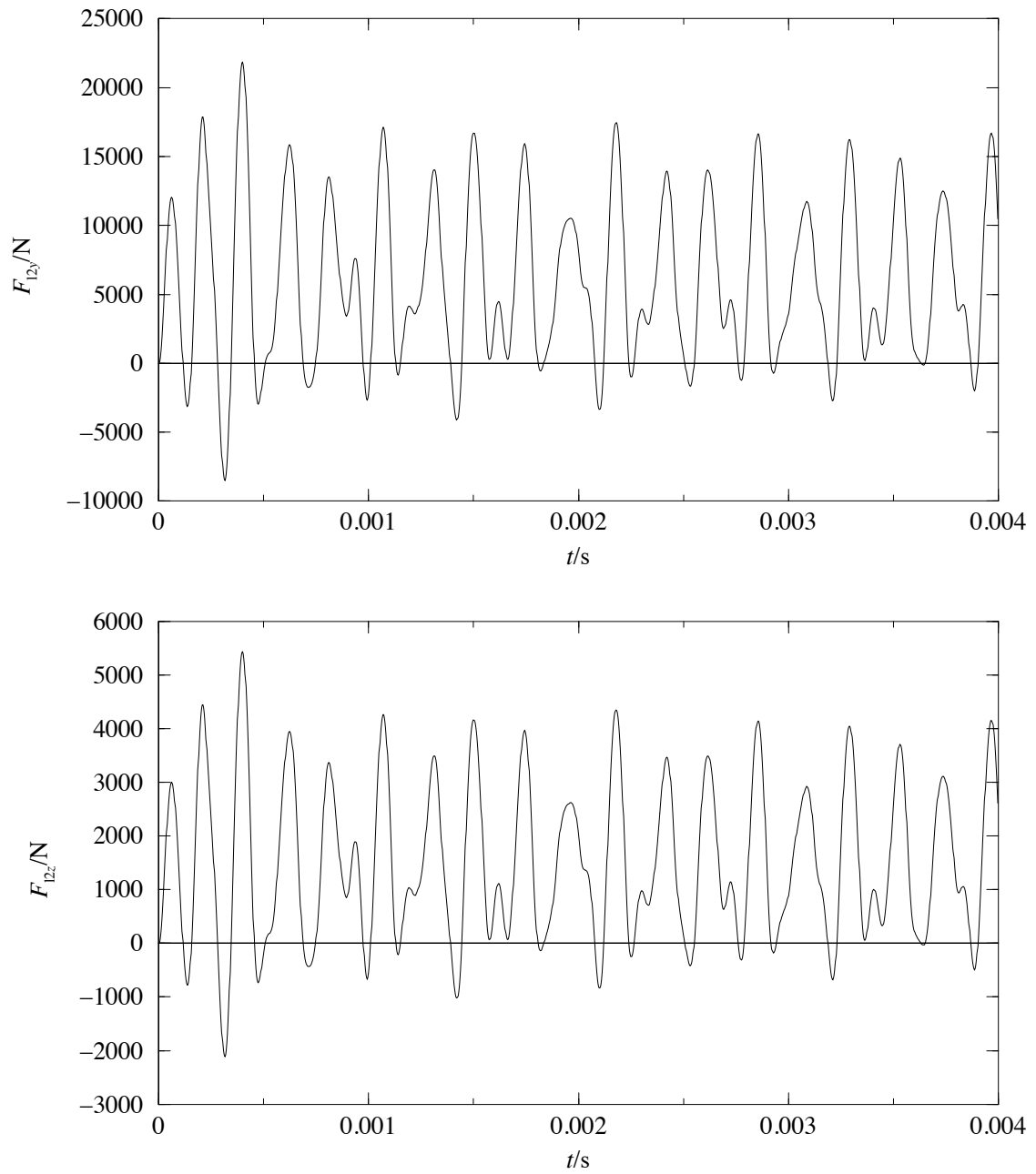


Bild F.2: Lagerkräfte  $F_{12y}$ ,  $F_{12z}$

## Literaturverzeichnis

- [1] BÖRNER, Jörg: *Modellreduktion für Antriebssysteme mit Zahnradgetrieben zur vereinfachten Berechnung der inneren dynamischen Zahnkräfte*. Dresden, TU, Fak. für Maschinenwesen, Dissertation A, 1988
- [2] FRITZSCHE, Gottfried: *Informationsübertragung : Wissensspeicher*. 1. Aufl. Berlin : Verlag Technik, 1977
- [3] GROSSMANN, Knut (Hrsg.): *Die Realität im Virtuellen : Systemsimulation in technischen Anwendungen*. Dresden, 1998. – Lehre, Forschung, Praxis : Schriftenreihe des Lehrstuhls für Werkzeugmaschinenbau
- [4] HAASE, Klaus (Mitarb.): *Fachwissen des Ingenieurs*. Bd. 1 : Grundlagen des Konstruierens. 8. Aufl. Leipzig : Fachbuchverlag, 1989. – ISBN 3-343-00012-4
- [5] ITI GmbH. Dresden: *ITI-SIM V2 : Bibliothek Mechanik*. 1995. – Handbuch zur Simulations-Software ITI-SIM Version 2.0
- [6] KÜÇÜKAY, Ferit: *Dynamik der Zahnradgetriebe : Modelle, Verfahren, Verhalten*. Berlin ; Heidelberg ; New York ; London ; Paris ; Tokyo : Springer, 1987. – ISBN 3-540-17111-8
- [7] LINKE, Heinz: *Stirnradverzahnung : Berechnung, Werkstoffe, Fertigung*. München ; Wien : Hanser, 1996. – ISBN 3-446-18785-5
- [8] THIELE, Michael: *Anlaufbeanspruchung bei Getriebemotoren*. Dresden, TU, Fak. für Maschinenwesen, Diplomarbeit, 1998

# Sachregister

- Ausgangsmoment 12
- Axiallager 14
- Bewegungsgleichung 17, 19, 26
- d'Alembertsches Prinzip 18
- Dämpfungskoeffizient 17, 21
- Eigenfrequenz 19–21, 25
- Eingangsmoment 12
- Einheitsmatrix 19
- Elemente 28
- Festkörperberührung 16
- FFT 28
- Frequenzanalyse 28
- Frequenzverhältnis  $\eta$  25
- Gleichung, charakteristische 27
- Grundfrequenz 28
- inverse Matrix 19
- ITI-SIM 17
- Knoten 28
- Koordinatentransformation 35
- Körperschall 15, 16
- Korrekturfaktor 21
- Kräfteplan 14
- Lagerspiel 16
- Lagerung
  - statisch bestimmt 14
- Lüfterkennlinie 31
- Luftschall 15, 16
- Modellfenster 28
- Modul (Baustein) 10
- Normalebene 13
- Nullmatrix 19
- Oberschwingung 28
- Parametererregung 17
- pitting 15
- Profilüberdeckung 20
- Radial-/Axiallager 14
- Radialkraft 12
- Radiallager 14
- Runge-Kutta-Verfahren 17, **20**
- Schmierspalt
  - exzentrischer 16
- Schnelle Fourier-Transformation ↗ FFT
- Schrägungswinkel 13, 27
- Simulation
  - Schrittweite 20
- stationäre Phase 23
- Steifigkeit
  - Gesamt- 20, 21, 26
  - mittlere 18, 21
  - Zahnpaar- 20, 21
- Tangentialebene 12, **13**
- Tangentialkraft **12**, 13
- Transformator, ebener 35
- Übermatrix 19
- Wälzkörper
  - Verschleiß 16
- Zahnkraft
  - maximal zulässige 15
- Zustandsgleichung 19, 20
- Zustandsvektor 19, 20, 23